Univerza na Primorskem

FAMNIT, MEF

Osnove zavarovanja

Pisni izpit

17. junij 2020

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Vaše odgovore prosim napišite na priložene liste. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Posameznik pri banki vzame kredit v višini $D = 100.000£$. Kredit bo odplačal v enakih obrokih, plačljivih na koncu vsakega meseca v trajanju 25 let. Privzemite, da je efektivna obrestna mera $i = 2,5\%$. Za računanje privzemite, da so vsi meseci enako dolgi.

a. (5) Izračunajte višino mesečnega obroka.

Rešitev: Označite višino obroka z A. Sedanja vrednost vseh prihodnjih obrokov mora biti enaka sedanji vrednosti dolga D. Označimo $v = (1+i)^{-1}$ in $w = v^{1/12}$ (nekoliko smo poenostavili in predpostavili, da so meseci enako dolgi). Vseh mesecev je $n = 300$, zato mora veljati enačba

$$D = A(w + w^2 + \cdots + w^{300}) = \frac{Aw(1 - w^{300})}{1 - w}\,.$$

Sledi

$$A = \frac{D(1 - w)}{w(1 - w^{300})}\,.$$

Konkretno je $A = 578,14£$.

b. (5) Kako velik bo dolg takoj po plačilu obroka na koncu 12. leta odplačevanja kredita?

Rešitev: Sedanja vrednost 144 izplačil v prvih 12 letih je

$$A(w + w^2 + \cdots + w^{144}) = \frac{Aw(1 - w^{144})}{1 - w}\,,$$

kjer je A višina obroka, w pa je definiran v rešitvi a. dela naloge. V denarnih enotah dobimo 62.887,15. Sedanja vrednost preostalega dolga je 37.112,85. Če boste povpraševali po vašem preostalem dolgu v banki po 12 letih, bo odgovor

$$A(w + w^2 + \cdots + w^{144}) \cdot (1 + i)^{12} = 66.649,35\,.$$

c. (10) Kolikšen del 145. obroka so obresti?

Rešitev: Režim odplačevanja glavnice in obresti je stvar dogovora, tako da je v nalogi nekaj možnosti interpretacije. Najbolj naravna interpretacija je ta, da z vsakim obrokom odplačamo obresti na preostali dolg po plačilu zadnjega obroka in del glavnice. V našem primeru je preostali dolg po 144. obroku enak 66.649,35. V času do plačila 145. obroka se nabere obresti v višini $\left((1+i)^{\frac{1}{12}} - 1\right) \times 66.649,35 =$ $271,54$.

2. (20) Nemška tridesetletna obveznica *DE0001102341* je bila izdana 26. 4. 2014, glavnica pa bo izplačana 15. 8. 2046. Letni kupon v višini 2,5% nominalne vrednosti bo izplačan letno vsakega 15. 8. v letu vključno z 15. 8. 2046, ko vam izplačajo tudi glavnico.

a. (10) Cena obveznice na dan 28. 5. 2020 je bila 166,85, kar pomeni, da dolg v višini 100 € kupite za 166,85 €. Kolikšna je bila efektivna obrestna mera na dan 28. 5. 2020? Navedite numerično aproksimacijo in postopek. Privzemite, da je leto vedno dolgo 365 dni.

Rešitev: Do prvega izplačila kupona je 79 dni, kar je delež $\delta = 0,2164$. *Sedanja vrednost prihodnih izplačil za dolg v višini 100€ bo*

$$PV = 2,5 \cdot (v^{\delta} + v^{\delta+1} + \cdots + v^{\delta+26}) + 100 \cdot v^{\delta+26}\,,$$

kar lahko poenostavimo v

$$PV = v^{\delta}(2,5 \cdot \frac{1 - v^{27}}{1 - v} + 100 \cdot v^{26})\,.$$

Ugibamo, da bo efektivna obrestna mera blizu 0 ali morda celo negativna. S poskušanjem ugotovimo $v = 0.9998146$, *kar da obrestno mero* $i = 0,0001854343$.

b. (10) Kolikšna bi morala biti cena obveznice, da bi bila enako dobra naložba kot depozit na bančnem računu z obrestno mero 0,5% v istem časovnem obdobju?

Rešitev: Uporabimo isto formulo kot v prvem delu naloge. Dobimo z $i = 0.005$

$$PV = 2,5 \cdot (v^{\delta} + v^{\delta+1} + \cdots + v^{\delta+26}) + 100 \cdot v^{\delta+26} = 150,98\,.$$

Cena bi morala biti $150,98$.

3. (20) Naj bo jakost smrtnosti za slučajno spremenljivko T_x enaka μ_{x+t}, gostoto T_x pa označimo z $f_x(t)$. Za vse nastopajoče funkcije predpostavite, da so zvezne.

a. (10) Pokažite, da velja

$$f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\,.$$

Rešitev: Po definiciji je

$$P(T_x \geq t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+u} du}\,.$$

Odvajamo na levi in desni po t. Na levi dobimo

$$-f_x(t)\,,$$

na desni pa

$$-e^{-\int_0^t \mu_{x+u} du} \cdot \mu_{x+t}\,.$$

Enakost sledi.

b. (10) Makehamov zakon specificira, da je

$$\mu_x = A + Bc^x$$

za neke konstante A, B in c. Izrazite $f_x(t)$.

Rešitev: Računamo

$$\int_0^t \mu_{x+u} du = At + B(c^{x+t} - c^x)/\log c\,.$$

Sledi

$$f_x(t) = e^{-At - B(c^{x+t} - c^x)/\log c} \cdot (A + Bc^{x+t})\,.$$

4. (20) Moški star 65 let je za pokojnino privarčeval 200.000€. Za privarčevani denar si bo kupil rento, lahko takoj, lahko pa z odlogom. Privzemite, da stroškov upravljanja in administrativnih stroškov ni. Privzemite, da je obrestna mera $i = 0,02$. Prvo izplačilo rente je na koncu prvega leta zavarovanja, če je zavarovanec še živ, potem pa na koncu vsakega leta, dokler je zavarovanec živ. Na voljo imate naslednje podatke:

x	q_x	$\ddot{a}_x$
65	0.0078	18,801
66	0.0082	18,318
67	0.0086	17,800
68	0.0091	17,284
69	0.0098	16,763
70	0.0101	16,237
71	0.0114	15,708

a. (10) Kako visoka bo renta, če si jo moški kupi takoj, ko dopolni 65 let? Prvo izplačilo bo v starosti 66 let.

Rešitev: Označimo višino rente z x. Sedanja pričakovana vrednost izplačil bo za zavarovalnico

$$EPV = x \cdot v \cdot \ddot{a}_{66} \cdot p_{65}\,,$$

kar mora biti enako privarčevanim sredstvom. Sledi

$$x = \frac{200.000}{v \cdot \ddot{a}_{66} \cdot p_{65}} = 11.224,02\,.$$

b. (10) Privzemite, da se moški odloči, da bo dal na bančni račun $m \cdot x$ enot denarja, s preostankom pa si bo kupil odloženo rento v višini x s prvim izplačilom v starosti $66 + m$ za $m = 5$. Kolikšen bo x?

Rešitev: Sedanja pričakovana vrednost odložene rente je

$$EPV = v^6 \cdot x \cdot \ddot{a}_{71} \cdot {}_6p_{65}\,.$$

Ta količina mora biti enaka $C - mx$, kjer je $C = 200.000$. Sledi

$$x = \frac{C}{m + v^6 \cdot \ddot{a}_{71} \cdot {}_6p_{65}}\,.$$

Vemo, da je

$${}_6p_{65} = \prod_{i=0}^{5}(1 - q_{65+i}) = 0,948\,,$$

torej je $x = 10.978,69$.

5. (20) Mešano zavarovanje za moškega starega 30 let je definirano za naslednjimi podatki:

- V primeru smrti pred starostjo 65 let je izplačilo 10.000 € ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl.
- V primeru doživetja zavarovalnica izplača enkratno vsoto 50.000 € ob dosegu starosti 65 let.
- Premije so plačljive v trenutkih $k = 0, 1, \ldots, 29$ v naslednjih 30 letih ali do leta smrti, če ta nastopi pred 60 letom.
- Pridobitveni stroški so $\alpha = 150$ €, inkaso stroški so $\beta = 0.01$, torej je strošek ob vsakem plačilu 1% premije, upravni stroški pa so $\gamma = 0,001$ in se obračunajo kot delež zavarovalne vsote 50.000 €, če je zavarovanec na začetku leta še živ, vendar samo do 60 leta starosti zavarovanca. Strošek γ se zadnjič obračuna, ko je zavarovanec star 59 let, če je še živ. Privzemite konstantno letno obrestno mero 3,2%.
- ${}_{35}p_{30} = 0,9184$, $\ddot{a}_{30:\,\overline{30}|} = 24,03$ in $A^1_{30:\,\overline{35}|} = 0.038$.

a. (10) Izračunajte premijo z upoštevanjem stroškov.

Rešitev: Po principu ekvivalence mora veljati

$$10.000 \cdot A^1_{30:\overline{35}|} + 50.000 A_{30:\overline{35}|}{}^{1} + \alpha + \beta\pi\ddot{a}_{30:\overline{30}|} + \gamma \cdot 50.000\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = \pi\ddot{a}_{30:\overline{30}|}.$$

Izrazimo premijo

$$\pi = \frac{10.000 \cdot A^1_{30:\overline{35}|} + 50.000 \cdot v^{35}{}_{35}p_{30} + 150 + 0,001 \cdot 50.000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|}(1 - 0,01)}.$$

Upoštevamo $v = 1/(1 + 0,032) = 0,97$, *poračunamo*

$$\pi = \frac{10.000 \cdot 0,038 + 50.000 \cdot 0,97^{35} \cdot 0,9184 + 150 + 0,001 \cdot 50.000 \cdot 24,03}{24,03 \cdot 0,99}$$

in dobimo

$$\pi = 737,48€.$$

b. (10) Privzemite, da bo zavarovanec še živ na začetku 29 leta zavarovanja, ko je star 58 let. Privzemite $p_{58} = 0.996$, ${}_7p_{58} = 0.959$, in $A^1_{58:\,\overline{7}|} = 0,036$. Izračunajte zavarovalno tehnične rezervacije na začetku 29 leta zavarovanja z upoštevanjem stroškov.

Rešitev: Velja

$${}_{28}V = 10.000A^1_{58:\overline{7}|} + 50.000 \cdot v^7{}_7p_{58} + \gamma 50.000\ddot{a}_{58:\overline{2}|} + \beta\pi\ddot{a}_{58:\overline{2}|} - \pi\ddot{a}_{58:\overline{2}|}.$$

Vstavimo podatke

$$
\begin{aligned}
{}_{28}V &= 10.000 \cdot 0,036 + 50.000 \cdot 0,97^7 \cdot 0,959 + 0,001 \cdot 50.000(1 + vp_{58}) \\
&\quad + 0,01 \cdot 292,38 \cdot (1 + vp_{58}) - 292,38 \cdot (1 + vp_{58})
\end{aligned}
$$

in nadalje

$$
\begin{aligned}
{}_{28}V &= 10.000 \cdot 0,036 + 50.000 \cdot 0,97^7 \cdot 0,959 \\
&\quad + (1 + 0,97 \cdot 0,996)(0,001 \cdot 50.000 + 0,01 \cdot 292,38 - 292,38) \\
&= 38.631,97€.
\end{aligned}
$$

6. (20) Zavarovanje za primer smrti za osebo staro x ponuja izplačilo v višini $c_j = C \cdot (1+i)^j$ za primer smrti v letu j na koncu leta j (leta začnemo šteti z 1). Premijo Π_x oseba plačuje na začetku vsakega leta dokler je še živa. Privzemimo efektivno obrestno mero i.

a. (10) Označite s Π_x premijo za zgornje zavarovanje. Efektivna obrestna mera naj bo i. Izrazite neto premijo za Π_x z ustreznimi aktuarskimi simboli. Navedite tudi obrestno mero, ki vstopa v izračun aktuarskih simbolov.

Rešitve: Po principu ekvivalence mora veljati

$$\sum_{k=0}^{\infty} C(1+i)^{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \pi_x \ddot{a}_x .$$

Vrednosti $(1+i)^{k+1}$ *in* v^{k+1} *se ravno pokrajšata in sledi*

$$\pi_x = \frac{C \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k}}{\ddot{a}_x} .$$

Vsota $\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k}$ *je enaka*

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k) = 1,$$

kjer slučajna spremenljivka K *predstavlja število dopolnjenih let, ki jih bo še preživela oseba stara* x *let. Torej sledi*

$$\pi_x = \frac{C}{\ddot{a}_x} .$$

b. (10) Izrazite neto premijsko rezervo ${}_tV$ z ustreznimi aktuarskimi simboli. Navedite tudi obrestno mero, ki vstopa v izračun aktuarskih simbolov.

Rešitve: Premaknemo se za t *let v prihodnost in zapišemo razliko med pričakovano sedanjo vrednostjo izplačil in vplačil*

$${}_tV = \sum_{k=0}^{\infty} C(1+i)^{t+k+1} v^{k+1} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} - \pi_x \ddot{a}_{x+t} .$$

Sledi

$${}_tV = C(1+i)^t \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} - \pi_x \ddot{a}_{x+t} .$$

Podobno je tukaj vsota $\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k}$ *enaka*

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{x+t} q_{x+t+k} = \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k) = 1,$$

kjer slučajna spremenljivka K *predstavlja število dopolnjenih let, ki jih bo še preživela oseba stara* $x+t$ *let. Torej sledi*

$$ {}_tV = C(1+i)^t - \pi_x \ddot{a}_{x+t}. $$