Univerza na Primorskem

FAMNIT, MEF

Osnove zavarovanja

Pisni izpit

7. julij 2021

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.			•	•	
3.					
4.			•	•	
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) Banka posamezniku ponuja kredit v višini 200.000€ za obdobje 20 let. Privzetek je, da bo prvih 10 let obrestna mera 2.5% na letni ravni, za ostalih 10 let pa 3%. Odplačevanje bo mesečno, obrok pa bo vse obdobje enak. Privzemite, da so vsi meseci enako dolgi.

a. (5) Izračunajte višino mesečnega obroka.

Rešitev: označimo z x višino mesečnega obroka in $C = 200.000$. Označimo $i_1 = 0,025$ in $i_2 = 0,03$ in $v_k = (1+i_k)^{-1}$ za $k = 1,2$. Po 10 *letih odplačevanja bo sedanja vrednost dolga*

$$C - x\sum_{k=1}^{120} v_1^{\frac{k}{12}}\,,$$

dejanska vrednost dolga pa

$$C' = (1+i_1)^{10}\left(C - x\sum_{k=1}^{120} v^{\frac{k}{12}}\right)\,.$$

Lahko si mislimo, da po 10 letih posameznik ponovno vzame kredit v višini C'. Veljati mora

$$C' = x\sum_{k=1}^{120} v_2^{\frac{k}{12}}\,.$$

Dobimo enačbo

$$(1+i_1)^{10}\left(C - x\sum_{k=1}^{120} v_1^{\frac{k}{12}}\right) = x\sum_{k=1}^{120} v_2^{\frac{k}{12}}\,.$$

Izračunamo

$$C = x\left(\sum_{k=1}^{120} v_1^{\frac{k}{12}} + \sum_{k=1}^{120} v_1^{10} v_2^{\frac{k}{12}}\right)\,.$$

Numerično je $x = 1.067,91$.

b. (5) Kakšni enačbi ustreza efektivna obrestna mera, po kateri se je posameznik zadolžil? Poiščite numerično aproksimacijo.

Rešitev: recimo, da je w diskontni faktor, ki izhaja iz efektivne obrestne mere. Veljati mora

$$C = x\sum_{k=1}^{240} w^{\frac{k}{12}} = \frac{x\cdot w(1-w^{20})}{1-w^{\frac{1}{12}}}\,.$$

Efektivna obrestna mera bo med $0,025$ in $0,03$. Z nekaj poskušanja ugotovimo $i = 0.2613$.

c. (10) Kolikšen je dolg po 15 letih odplačevanja?

Rešitev: v prvi točki smo ugotovili, da je dolg po 10 *letih* $C' = 110.808,7$*. Postavimo izhodišče na* 10*. leto. Po nadaljnih* 5 *letih odplačavanja bo sedanja vrednost dolga*

$$C' - x \sum_{k=1}^{60} v_2^{\frac{k}{12}}$$

in dejanska vrednost dolga

$$(1+i_2)^5 \left(C' - x \sum_{k=1}^{60} v_2^{\frac{k}{12}} \right) .$$

Numerično je dolg $59.491,0$*.*

2. (20) V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico. Če obveznico kupite danes, boste v prihodnosti dobivali plačila kuponov po navedenem načrtu, na koncu pa boste dobili še glavnico. Obveznica je denominirana v € in se prodaja v apoenih po 100,00€. Privzemite, da je leto dolgo 1 enoto, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

a. (10) Cena dveh apoenov obveznice na dan 29. 4. 2020 je bila 208,2€. Bi se 29. 4. 2020 odločili za nakup te obveznice, če predpostavite, da bo letna efektivna obrestna mera v obdobju življenja obveznice konstantno 4% in da boste izplačila kuponov porabili in ne ponovno investirali?

Rešitev: Izračunati moramo sedanjo vrednost prihodnih izplačil in jo primerjati s ceno obveznice na dan 29. 4. 2020. Po formuli je

$$PV = \sum_{i=1}^{n} e^{-\delta t_i} K_i + G e^{-\delta T}\,,$$

kjer so $K_1, K_2, \ldots$ *nominalne vrednosti kuponov,* $t_1, t_2, \ldots$ *časi izplačil kuponov,* G *vrednost glavnice in* T *čas vračila glavnice. V našem primeru je do prvega plačila kupona* 261 *dni, kar je merjeno v letih enako* $t_1 = 0.7115$. *Potem bo kupon izplačan še devetkrat, tako da so čas izplačil* $k + t_1$ *za* $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. *Velja tudi* $T = t_1 + 9$. *Sledi*

$$PV = \sum_{k=0}^{9} v^{t_1+k} K + v^{t_1+9} G\,.$$

Poenostavimo v

$$PV = v^{t_1}\left(\frac{(1-v^{10})K}{1-v} + v^9 G\right).$$

Vstavimo $1 + i = 1,04$ *in dobimo*

$$PV = 112,40\,.$$

Cena obveznice je 104, 1, *tako da obveznico bi kupili.*

b. (10) Borzni analitiki menijo, da bi bila prava cena obveznice na dan 29. 4. 2020 107,75€. Ob kolikšni jakosti obresti je izračunana ta cena, ce predpostavite, da bo jakost obresti konstantna v navedenem obdobju. Rešitev te naloge je možna samo numerično. Zapišite le enačbo, ki jo je potrebno rešiti.

Rešitev: Cena mora biti enaka sedanji vrednosti, torej

$$107,75 = v^{t_1}\left(\frac{(1-v^{10})K}{1-v} + v^9 G\right).$$

Z numeričnim izračunom dobimo, da mora biti $i = 1.0456508$. *Vemo, da je* $\delta = \log(1 + i)$.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izplač. glav.	Preostala glav.
15.01.2020	0	5,375	0	100
15.01.2021	1	5,375	0	100
15.01.2022	2	5,375	0	100
15.01.2023	3	5,375	0	100
15.01.2024	4	5,375	0	100
15.01.2025	5	5,375	0	100
15.01.2026	6	5,375	0	100
15.01.2027	7	5,375	0	100
15.01.2028	8	5,375	0	100
15.01.2029	9	5,375	0	100
15.01.2030	10	5,375	100	0

3. (20) Naj bo T življenjska doba posameznika. Privzemite, da velja

$$P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^{\alpha} & \text{za } 0 \leq t \leq \omega \\ 1 & \text{sicer} \end{cases}$$

za $\alpha, \omega > 0$.

a. (5) Navedite ${}_tp_x$.

Rešitev: po definiciji je

$$\mu(s) = \frac{f_T(s)}{1 - F_T(s)}\,.$$

Vstavimo in sledi

$$\mu(s) = \frac{\alpha}{\omega - s}$$

za $s < \omega$. Če je $x + t > \omega$, je ${}_tp_x = 0$, sicer pa

$${}_tp_x = \left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)^{\alpha}\,.$$

b. (5) Izračunajte $\mu(t)$.

Rešitev: glej prvo točko.

c. (5) Poiščite gostoto porazdelitve T_x za $0 \leq x \leq \omega$.

Rešitev: odvajamo $-{}_tp_x$ po t in dobimo

$$f_{T_x}(t) = \frac{\alpha}{\omega - x}\left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)^{\alpha - 1}\,.$$

d. (5) Izračunajte $E(T_x)$.

Rešitev: vemo, da je

$$E(T_x) = \int_0^{\omega - x} {}_sp_x\, ds\,.$$

Z integracijo sledi

$$E(T_x) = \frac{\omega - x}{\alpha + 1}\,.$$

4. (20) Zavarovalnica osebi, ki je privarčevala 100.000€, ponuja doživljenjsko rento. Privzeta obrestna mera je 2%, oseba pa je stara 70 let. Strošek ob sklenitvi pogodbe je $\alpha = 1.000$, ob vsakem izplačilu pa zavarovalnica obračuna delež $\beta = 0.02$ rente kot strošek, prvo izplačilo rente pa je leto po sklenitvi pogodbe. Posebnost pogodbe je, da v primeru smrti zavarovanca pred prvim izplačilom rente zavarovalnica dedičem vrne vplačano premijo razen stroška α na koncu prvega leta. Dana sta podatka $q_{70} = 0.0106$ in $\ddot{a}_{70} = 16,24$. Oseba bo rento plačala v enem znesku ob sklenitvi pogodbe.

a. (10) Izračunajte $\ddot{a}_{71}$.

Rešitev: po definiciji je

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \\ &= 1 + v \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} {}_{k-1}p_{x+1} p_x \\ &= 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$\ddot{a}_{71} = \frac{\ddot{a}_x - 1}{v p_x}\,.$$

Numerično je $\ddot{a}_{71} = 15,71$.

b. (10) Kako visoka bo renta?

Rešitev: označimo višino rente z y. *Označimo* $C = 100.000$. *Veljati mora*

$$y v p_x \ddot{a}_{71} + \alpha + (C - \alpha) v q_{70} + \beta y v p_{70} \ddot{a}_{71} = C\,.$$

Numerično je $y = 3.195,06$.

5. (20) Oseba stara x let kupi odloženo doživljenjsko rento z enkratnim vplačilom premije. Oseba bo prejemala izplačilo 1 v trenutkih $m, m+1, \ldots$ šteto od trenutka nakupa. Diskontni faktor naj bo v. Za enoto časa izberemo leto.

a. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Rešitev: Če bo oseba živa v trenutku začetka izplačevanja, bo v tistem trenutku vrednost doživljenjske rente enaka $\ddot{a}_{x+m}$. *V trenutku* k *bo sedanja vrednost te rente* $v^{m-k}\ddot{a}_{x+m}$, *vendar bomo to vsoto potrebovali le, če bo oseba dočakala začetek izplačevanja. Torej bo*

$$ {}_kV = v^{m-k}{}_{m-k}p_{x+k}\ddot{a}_{x+m}\,. $$

b. (10) Pogodbo spremenimo tako, da oseba plačuje premijo v času varčevanja v trenutkih $0, 1, \ldots, m-1$ šteto od sklenitve pogodbe. V primeru smrti pred začetkom izplačevanja rente, svojci dobijo delež α nominalne do trenutka smrti vplačane premije na koncu leta smrti. Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$ v tem primeru.

Rešitev: Po načelu ekvivalence najprej izrazimo premijo. Veljati mora

$$ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(k+1)v^{k+1}\pi P(K_x = k) + v^m \ddot{a}_{x+m} P(K_x \geq m) = \sum_{k=0}^{m-1} \pi v^k P(K_x \geq k)\,. $$

Iz te enačbe lahko izrazimo premijo π. *Ko premijo enkrat imamo, lahko zapišemo*

$$ \begin{aligned} {}_kV &= \\ &= \sum_{l=0}^{m-k-1} (k+1+l)\alpha\pi \cdot v^{l+1} \cdot {}_lp_{x+k}q_{x+k+l} + v^{m-k}\ddot{a}_{x+m}{}_{m-k}p_{x+k} - \\ &\qquad -\pi\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}\,. \end{aligned} $$

6. (20) Oseba stara $x = 40$ let z zavarovalnico sklene zavarovanje za doživetje v trajanju 20 let z izplačilom $A = 1$. Privzemite, da je obrestna mera enaka $i = 4\%$ za celotno obdobje. Poleg tega zavarovalnica svojcem vrne akumulirano vrednost premij pri efektivni obrestni meri $i = 4\%$, če je $K_x \leq 10$. Premije se plačujejo na začetku vsakega leta vseh 20 let zavarovanja.

a. (10) Izrazite neto premijo za to zavarovanje z aktuarskimi simboli.

Rešitev: Kot vedno izenačimo pričakovano sedanjo vrednost premij s pričakovano sednjo vrednostjo izplačil. Označimo $v = (1+i)^{-1}$. Označimo iskano premijo s π. Sedanja vrednost izplačil je

$$PV = \begin{cases} \pi(1 + v + \cdots + v^k) & \textit{če je } K_x = k \textit{ in } 0 \leq k \leq 10, \\ 0 & \textit{če je } 11 \leq K_x < 20, \\ v^{20} & \textit{če je } K_x \geq 20. \end{cases}$$

Sledi

$$\begin{aligned} & E\big(\textit{sedanja vrednost izplačil}\big) = \\ & = \sum_{k=0}^{10} \pi(1 + v + \cdots + v^k) P(K_x = k) + v^{20} P(K_x \geq 20)\,. \end{aligned}$$

Sedanjo vrednost premij dobimo kot $\ddot{a}_{40:\,\overline{20|}}$. Obe sednaji vrednosti izenačimo in dobimo enačbo za premijo.

b. (5) Izrazite ${}_{10}V$ z aktuarskimi simboli.

Rešitev: Postavimo se na začetek 10-tega leta. Označimo $y = x + 10$. Pričakovana sedanja vrednost izplačil bo

$$v \cdot (1 + v + \cdots + v^{10}) \cdot \pi P(K_y = 0) + v^{10} P(K_y \geq 10)\,.$$

Pričakovana sedanja vrednost premij pa bo $\ddot{a}_{50:\,\overline{10|}}$. Razlika je ${}_kV$.

c. (5) Izrazite ${}_{11}V$ z aktuarskimi simboli.

Rešitev: Na začetku 11-tega leta se zgornji produkt spremeni v zavarovanje za doživetje. Dobimo

$${}_{11}V_{40:\,\overline{20|}} = v^9 \cdot {}_9p_{51} - \ddot{a}_{51:\,\overline{9|}}$$