Univerza na Primorskem

FAMNIT, MEF

Osnove zavarovanja

Pisni izpit

6. julij 2022

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Jakost obrestne mere $\delta(t)$ je dana z

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,03 + 0,01t & \text{za } 0 \leq t \leq 8; \\ 0,05 & \text{za } t \geq 8; \end{cases} ,$$

kjer je enota časa leto.

a. (5) Navedite formulo za sedanjo vrednost enote denarja, ki bo izplačana v trenutku t v prihodnosti.

Rešitev: uporabimo splošno formulo

$$PV = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} .$$

Integracija je rutinska.

b. (5) Izračunajte sedanjo vrednost izplačila 500€ ki bo izplačana na koncu 15. leta.

Rešitev: računamo

$$\int_0^{15} \delta(u)du = 0,91 ,$$

iz česar sledi

$$PV = 500 \cdot e^{-0,91} = 201.26 .$$

c. (5) Privzemite, da boste prejemali enoto denarja na koncu vsakega leta v nadaljnjih dvajsetih letih. Izračunajte sedanjo vrednost tega denarnega toka.

Rešitev: računamo

$$PV = \sum_{k=1}^{20} e^{-\int_0^k \delta(u)du} = 11,27 .$$

Vsoto za zadnjih 12 let lahko poenostavimo.

d. (5) Privzemite, da boste prejemali enoto denarja na koncu vsakega leta nadaljnjih dvajset let, vendar je verjetnost, da nasprotna stranka ne izplača zneska za vsako leto enaka $p = 0,02$. Če nasprotna stranka v nekem letu ne izplača zneska, potem ne izplača vseh nadaljnjih zneskov. Dogodki, da pride v posameznem letu do neizplačila, so neodvisni med sabo.

Rešitev: vprašanje je o pričakovani sedanji vrednosti. Če je $X \sim \mathrm{Geom}(0,02)$, *iz besedila naloge sledi, da je verjetnost izplačila v trenutku* k *enaka* $P(X > k) = 0.98^k$. *Sledi*

$$EPV = \sum_{k=1}^{n} e^{-\int_0^k \delta(u)du} \cdot P(X > k) = 9,89 .$$

2. (20) V Tabeli 1 je amortizacijski načrt za obveznico RS73. Vsi zneski so v eurih. [1]

Datum kupona	Glavnica	Obrestna mera rate	Višina kupona	Plačilo glavnice payment
25.3.2015	1,000,000,000.00	2.250%	8.691.780,82	0.00
25.3.2016	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2017	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2018	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2019	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2020	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2021	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	0.00
25.3.2022	1,000,000,000.00	2.250%	22.500.000,00	1.000.000.000,00

Tabela 1 Amortizacijski načrt za obveznico RS73.

a. (10) Tržna vrednost izdanih obveznic na dan 3. 3. 2015 je bila 9.333.930,8€. Ali je trg zahteval višjo obrestno mero kot je nominalna obrestna mera v višini 2,25%? Utemeljite odgovor. Privzemite, da je dolžina leta vedno 365 dni.

Rešitev: če diskontiramo z nominalno obrestno mero 2,25%, in označimo $\delta_0 = 22/365$, *dobimo*

$$PV = 8.691.780.82 \cdot v^{delta_0} + \sum_{k=1}^{7} 22.500.000 \cdot v^{\delta_0+k} + 1.000.000.000 \cdot v^{\delta_0+7},$$

kar je $9.913.417.701,99$. *To je občutno več kot ponuja trg, kar pomeni, da trg zahteva občutno višjo obrestno mero (v finančni krizi so nekatere investicijske hiše slovenski dolg uvrščale nizko).*

b. (10) Katero enačbo bi morali rešiti, da bi ugotovili, kakšno obrestno mero je zahteval trg? Navedite numerično aproksimacijo te obrestne mere.

Rešitev: poiskati moramo tak v, da bo sedanja vrednost po formuli iz prvega dela naloge enaka tržni ceni. Na palec bi začeli iskati aproksimacije pri 3,5%. Z nekaj poskušnja dobimo obrestno mero 3,44815%.

[1] Vir: Ministrstvo za finance, Republika Slovenija

3. (20) Poenostavite ali izračunajte spodnje izraze:

a. (5) Zapišite produkt

$$(1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+n-1})$$

z enim samim aktuarskim simbolom.

Rešitev: vemo, da je $1-q_{x+k}=p_{x+k}$. *Produkt je enak*

$$p_x\cdot p_{x+1}\cdots p_{x+n-1}=p_{x+n}$$

po pravilu ${}_sp_{x+t}\cdot {}_tp_x={}_{t+s}p_x$.

b. (5) Naj bo μ jakost smrtnosti. Kaj je

$$\exp\left(-\int_x^\infty \mu(s)ds\right)?$$

Rešitev: veamo, da je

$$P(T_x\geq t)=\exp\left(-\int_x^{x+t}\mu(s)ds\right).$$

Zgornji izraz je verjetnost za neskončno življenjsko dobo, torej 0.

c. (5) Naj bo μ jakost smrtnosti. Kako bi izračunali pričakovano življenjsko dobo osebe stare x?

Rešitevs: uporabimo lahko formulo

$$E(T_x)=\int_0^\infty tf_{T_x}(t)dt\,,$$

kjer je $f_{T_x}(t)$ *gostota. Vemo, da je*

$$f_{T_x}(t)={}_tp_x\cdot\mu(x+t)\,.$$

d. (5) Privzemite, da je v tabelah $q_{50}=0,001826$, vemo pa, da se je jakost smrtnosti spremenila in je $0,96\cdot\mu$. Kolikšen je spremenjeni q_{50}?

Rešitev: po definiciji je

$$p_{50}=\exp\left(-\int_{50}^{51}\mu(u)du\right).$$

Če se jakost smrtnosti množi z 0, 96, *je*

$$\tilde{p}_{50}=\exp\left(0.96\cdot\int_{50}^{51}\mu(u)du\right)=(p_{50})^{0.96}\,.$$

Sledi

$$\tilde{q}_{50}=1-\tilde{p}_{50}=1-p_{50}^{0,96}=0,001753\,.$$

4. (20) Označite z ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ neto premijsko rezervacijo na začetku leta k za mešano zavarovanje. Oseba je ob sklenitvi zavarovanja stara x, zavarovalna vsota pa je enaka 1. Oseba premijo plačuje na začetku vsakega leta, dokler je živa. Obrestno mero označite z i, premijo pa s $\Pi_{x:\overline{n}|}$. Za spodnje izraze ugotovite ali so pravilni ali ne in utemeljite vaše odgovore.

a. (5) ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$.

   Rešitev: to drži po načelu ekvivalence.

b. (5) $(1+i) \cdot {}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} + (1+i)\Pi_{x:\overline{n}|} = 1$.

   Rešitev: v trenutku $n-1$ vemo, da bomo na koncu leta gotovo izplačali vsoto 1. Obrestovana rezervacija v trenutku $n-1$ in obrestovana zadnja premija morata točno pokriti izplačilo.

c. (10) ${}_kV_{x:\overline{n}|} \geq 0$ za vse k.

   Rešitev: drži iz ekonomskih razlogov. Neto reyervacija mora biti nenegativna, ker sicer zavarovanec nima ekonomske motivacije za plačevanje premije.

5. (20) Oseba stara 44 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 16 let. Zavarovana vsota 10.000 EURO se izplača ob koncu leta, v katerem oseba umre, oziroma ob doživetju. Premije se plačujejo na začetku vsakega leta dokler zavarovanec živi, vendar največ 16 let. Začetni stroški znašajo 3,5% zavarovane vsote, inkaso stroški 6% bruto premije ter upravni stroški 0,3% zavarovane vsote za vsako leto zavarovanja.

a. (10) Zapišite enačbo za mesečno bruto premijo in jo na kratko obrazložite.

Rešitev: označimo zavarovano vsoto s C, deleže stroškov pa z običjnimi α, β in γ. Neznana premija naj bo Π. Po načelu ekvivalence je

$$\Pi \cdot \ddot{a}_{44:\,\overline{16}|} = C \cdot A_{44:\,\overline{16}|} + \alpha \cdot C + \beta \cdot \Pi \cdot a_{44:\,\overline{16}|} + \gamma \cdot C \cdot a_{44:\,\overline{16}|} \,.$$

Iz tega izračunamo Π.

b. (10) Zapišite neto premijsko rezervo ob koncu k-tega leta za $k \geq 1$ za zgornjo zavarovalno polico z aktuarskimi oznakami.

Rešitev: velja

$${}_kV = C \cdot A_{44+k:\,\overline{16-k}|} + \beta \cdot \Pi \cdot a_{44+k:\,\overline{16-k}|} + \gamma \cdot C \cdot a_{44+k:\,\overline{16-k}|} - \Pi \cdot \ddot{a}_{44+k:\,\overline{16-k}|} \,.$$

6. (20) Zavarovalnica ponuja naslednji produkt: sklenitelj zavarovanja je mati, ki je ob sklenitvi zavarovanja stara 33 let, hči pa 0 let. Premije mati plačuje 6 let na začetku leta v enakih zneskih, dokler je živa. Zadnja premija bo tako plačana v trenutku $k = 5$. Ob dopolnjenem 19 letu starosti hči prejme izplačilo v višini 10.000€, če je mati še živa. V vmesnem času v primeru smrti matere zavarovalnica hčeri izplača do tedaj vplačane in obrestovane premije in sicer na koncu leta smrti matere, ne pa tudi 10.000€ na koncu. V primeru smrti hčere so izplačila enaka kot da bi bila hči živa in gredo zakonitim dedičem. Obrestna mera je $i = 0.02$.

a. (10) Določite premijo za navedeno zavarovanje.

Rešitev: načelo ekvivalence uporabimo na nekoliko drugačen način. Označimo s Π *iskano premijo in s* K_{33} *življenjsko dobo matere. Za vsak primer* $K_{33} = k$ *za* $k = 0, 1, \ldots, 19$ *zapišimo sedanjo vrednost prihodkov in odhodkov zavarovalnice.*

(i) *za* $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *dobimo za prihodek*

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^k)$$

in odhodek

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^k)\,.$$

(ii) *za* $k = 6, 7, \ldots, 18$ *je prihodek*

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^5)$$

in odhodek

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^5)\,.$$

(iii) *za* $k \geq 19$ *je prihodek*

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^5)$$

in odhodek

$$10.000 \cdot v^{19}\,.$$

Ker so za $K_{33} \leq 18$ *prihodki in odhodki enaki, se pokrajšajo in na koncu velja enačba*

$$\Pi \cdot (1 + v + \cdots + v^5) \cdot P(K_{33} \geq 19) = 10.000 \cdot v^{19} \cdot P(K_{33} \geq 19)\,.$$

Sledi

$$\Pi = 1.201,43\,.$$

b. (10) Izračunajte neto rezervacijo ${}_{18}V$, če imate podano, da je $q_{51} = 0,00872$.

Rešitev: prihodkov od premije ni več, zato je ${}_{18}V$ *enaka pričakovani sedanji vrednosti obveznosti, ta pa je*

$$\Pi \cdot (1+i)^{19} \cdot (1 + v + \cdots + v^5) \cdot q_{51} + 10.000 \cdot v \cdot p_{51}\,.$$

Dobimo

$${}_{18}V = 9.805,63\,.$$