Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Osnove zavarovanja

Računski izpit

4. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) Trenutna višina EURIBOR-a je 2,056%. Banka za kredit v višini 100.000€ v trajanju 10 let zahteva obrestno mero enako EURIBOR-u s pribitkom 0,5%. Kredit se odplačuje na koncu vsakega meseca.

a. (5) Izračunajte mesečni obrok pri zgornji obrestni meri.

Rešitev: če je v diskontni faktor, mora veljati

$$C = x \cdot \sum_{k=1}^{120} v^{k/12},$$

kjer je x višina obroka in C višina kredita. Izračunamo $x = 943,91$€.

b. (15) Recimo, da se po letu dni EURIBOR poveča za 0,3%, pribitek pa ostane enak. Kolikšen bo novi mesečni obrok za odplačevanje kredita?

Rešitev: najprej moramo izračunati, koliko dolga še imamo po letu odplačevanja kredita. Sedanja vrednost prvih 12 obrokov bo

$$x \cdot \sum_{k=1}^{12} v^{k/12} = 11.173,34,$$

Sedanja vrednost preostalega dolga je tako $88.826,62$. Dejanska vrednost dolga na koncu prvega leta pa bo obrestovana sedanja vrednost, torej $C' = 91,097,03$. Označimo novi mesečni obrok z y, novi diskontni faktor pa z w. Veljati mora

$$C' = y \cdot \sum_{k=1}^{108} w^{k/12}.$$

Vstavimo in dobimo $y = 956,01$.

2. (20) Nemška obveznica DE000BU2F009 je bila izdana 10. 4. 2024. Nominalna obrestna mera je 2,60%, kar pomeni, da bodo imetnikom obveynic vsako leto 10. 4. izplačali kupon v višini 2,60% glavnice naslednjih 30 let, ob dospetju pa poleg kupona še glavnico. Spletna stran navaja, da je tržna cena obveznice z glavnico 1.000€ dne 28. 5. 2025 enaka 978,88€. Računajte, da so vsa leta dolga 365 dni.

a. (10) Ali zgornja tržna cena obveznice pomeni, da trgi zahtevajo večjo obrestno mero kot 2,60% na dolg?

Rešitev: dne 28. 5. 2025 je do naslednjega izplačila kupona še 317 dni. Če diskontiramo prihodnje denarne tokove iz naslova kuponov in glavnice z obrestno mero 2,6% in upoštevamo, da bo izplačanih 29 *kuponov v višini* 26€*ter glavnica v višini* 1000€*, dobimo*

$$26 \cdot \sum_{k=0}^{28} v^{\frac{317}{356}+k} + 1000 \cdot v^{\frac{317}{365}+28} = 1003,38\,.$$

Cena 978,88€ pomeni, da finančni trgi zahtevajo višjo obrestno mero.

b. (10) Preverite, da je interni donos obveznice dne 28. 5. 2025 enak 2,72361%.

Rešitev: če diskontiramo z navedeno obrestno mero, dobimo točno ceno 978,88€*. To pomeni, da je navedena obrestna mera res točno interni donos obveznice.*

3. (20) Naj bo za $a > 0$ in $b > 1$

$$ {}_tp_x = \left(\frac{1+x}{a+x+t}\right)^b . $$

Po Direktivi Solventnost 2 mora zavarovalnica pri izračunih kapitalskih zahtev jakost smrtnosti pomnožiti $1+c$ za predpisano konstanto $c > 0$.

a. (10) Izračunajte nove verjetnosti ${}_t\tilde{p}_x$.

Rešitev: vstavimo $x = 0$ in upoštevamo zvezo

$$ -\frac{d}{dt}\left(\log {}_tp_0\right) = \mu_t . $$

Odvajamo in dobimo

$$ \mu_t = \frac{b}{a+t} . $$

Množimo z $1+c$. Opazimo, da je jakost smrtnosti enake oblike, le b nadomestimo z $b(1+c)$. Sledi

$$ {}_t\tilde{p}_x = \left(\frac{1+x}{a+x+t}\right)^{b(1+c)} . $$

b. (10) Se pričakovana življenjska doba $E(T_x)$ zmanjša za vse starosti x?

Rešitev: izraz v oklepaju v definiciji ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{a+x+t}\right)^b$ je zaradi $a > 0$ vedno strogo manjši od 1. Če potenco b povečamo, se izraz zmanjša in s tem tudi

$$ E(T_x) = \int_0^\infty {}_tp_x dt . $$

Druga možnost je direkten izračun

$$ E(T_x) = \frac{a+x}{b-1}\left(\frac{1+x}{a+x}\right)^b . $$

Spet vidimo, da povečanje b vodi do zmanjšanja $E(T_x)$.

4. (20) Označite z ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ neto premijsko rezervacijo na začetku leta k za mešano zavarovanje. Oseba je ob sklenitvi zavarovanja stara x, zavarovalna vsota pa je enaka 1. Oseba premijo plačuje na začetku vsakega leta, dokler je živa. Obrestno mero označite z i, premijo pa s $\Pi_{x:\overline{n}|}$. Za spodnje izraze ugotovite ali so pravilni ali ne in utemeljite vaše odgovore.

a. (5) ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$.

   Rešitev: to drži po načelu ekvivalence.

b. (5) $(1+i) \cdot {}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} + (1+i)\Pi_{x:\overline{n}|} = 1$.

   Rešitev: v trenutku $n-1$ vemo, da bomo na koncu leta gotovo izplačali vsoto 1. Obrestovana rezervacija v trenutku $n-1$ in obrestovana zadnja premija morata točno pokriti izplačilo.

c. (10) ${}_kV_{x:\overline{n}|} \geq 0$ za vse k.

   Rešitev: drži iz ekonomskih razlogov. Neto rezervacija mora biti nenegativna, ker sicer zavarovanec nima ekonomske motivacije za plačevanje premije.

5. (20) Oseba stara x let želi kupiti mešano zavarovanje za dobo n let. Privzemite, da je obrestna mera enaka i. Če se smrt zgodi v letu k pred doživetjem, je izplačilo enako $C(1+j)^{k+1}$ na koncu leta, v katerem je nastopila smrt, kjer je $0 < j < i$. Ob doživetju je izplačilo enako $C(1+j)^n$. Premija se plačuje v enakih zneskih na začetku vsakega leta zavarovanja do vključno začetka zadnjega leta. Začetni stroški naj bodo α in delež $\bar{\beta}$ prve premije. Od druge plačane premije naprej, če do plačila pride, zavarovalnica obračunava delež β premije kot strošek procesiranja plačila premije. Drugih stroškov ni.

a. (10) Izrazite premijo z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: označimo $\tilde{v} = (1+j)/(1+i)$ *in označimo iskano premijo z* Π. *Po načelu ekvivalence mora veljati*

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + \sum_{k=0}^{n-1} C\tilde{v}^{k+1} P(K_x = k) + \\ + \; C\tilde{v}^n P(K_x \geq n) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta v^k \Pi P(K_x \geq k) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \Pi v^k P(K_x \geq k)\,.$$

V aktuarskih simbolih je

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + CA_{x:\,\overline{n}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta\Pi = \Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}\,.$$

Simbol $A_{x:\,\overline{n}|}$ *je izračunan z diskontnim faktorjem* $\tilde{v}$, *simbol* $a_{x:\,\overline{n}|}$ *pa z diskontnim faktorjem* v. *Iz enačb lahko izračunamo premijo* Π.

b. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

Rešitev: za $k < n-1$ *je*

$${}_kV = C(1+j)^k A_{x+k:\,\overline{n-k}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|} - \beta\Pi - \Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|}\,.$$

Simbol $A_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ *je izračunan z diskontnim faktorjem* $\tilde{v}$, *simbol* $a_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ *pa z diskontnim faktorjem* v. *Iz enačb lahko izračunamo premijo* Π.

6. (20) Oseba se upokoji pri starosti 69 let in si kupi doživljenjsko letno rento v višini 5.000€. Prvo izplačilo rente bo dobila ob dopolnitvi starosti 70 let. Privzemite, da je obrestna mera $i = 0,025$. Posebnost rente je, da v primeru smrti osebe v prvih dveh letih prejemanja rente zakoniti dediči na koncu leta smrti dobijo 50% cene neto vrednosti rente ob nakupu. Če oseba umre pred začetkom prejemanja rente v starosti 70 let, dediči dobijo 90% cene rente ob koncu leta smrti. Privzemite, da stroškov ni.

a. (15) Privzemite, da je $\ddot{a}_{70} = 15,47$, $p_{69} = 0,9902$ in $A^{1}_{70:\,\overline{2}|} = 0.021$. Izračunajte ceno rente, ki jo oseba kupi v starosti 69 let.

Rešitev: označimo ceno rente s C. *Zgornji zavarovalni produkt si lahko predstavljamo tako, da v starosti* 70 *let oseba dobi dve pogodbi: prva je renta s sedanjo vrednostjo* $5.000 \cdot \ddot{a}_{70}$, *druga pa zavarovalna polica za primer smrti za osebo staro* 70 *let v trajanju* $n = 2$ *leti in zavarovalno vsoto* $0,5 \cdot C$. *Ker oseba rento kupuje v starosti* 69 *let, moramo zgornji vrednosti diskontirati in upoštevati še to, da v primeru smrti pred prejemanjem rente dediči dobijo* $0,9 \cdot C$. *Sledi*

$$C = 0,9 \cdot v \cdot C \cdot q_{69} + p_{69} \cdot v \cdot \left(5.000 \cdot \ddot{a}_{70} + 0,5 \cdot C \cdot A^{1}_{x:\,\overline{n}|}\right) .$$

Rešimo linearno enačbo in dobimo $C = 74.609,07$.

b. (5) Privzemite, da oseba doživi starost 71 let. Kolikšne so obveznosti zavarovalnice v trenutku, preden izplačajo rento ob dopolnitvi starosti 71 let. Dano imate, da je $\ddot{a}_{71} = 14,85$ in $p_{71} = 0,9886$.

Rešitev: vrednost izplačil iz naslova rente je $5.000 \cdot \ddot{a}_{71}$. *Upoštevati moramo še morebitno izplačilo 50% cene rente v primeru smrti med 71 in 72 letom starosti. Sledi*

$${}_{71}V = 5.000 \cdot \ddot{a}_{71} + 0,5 \cdot v \cdot C \cdot q_{71} .$$

Uporabimo dane podatke in sledi ${}_{71}V = 74.664,90$.