

SEMINARSKA NALOGA

FINANČNA MATEMATIKA

FAMNIT, MEF, UNIVERZA NA PRIMORSKEM, 2024/2025

Seminarska naloga je obveznost pri predmetu *Finančna matematika*. Ocenite, ko oddate seminarsko nalogo. Rešitve lahko napišete na roko.

1. Končno izplačilo opcije je lahko odvisno od celotnega poteka cen temelja. Primer so *Azijske opcije*, kjer je izplačilo odvisno od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju. Označimo cene temelja v $t = 0, 1, 2, \dots, T$ s $S_0, S_1, \dots, S_T$, izplačilo na koncu pa bo enako

$$f(S_0, S_1, \dots, S_T),$$

kjer je $f: \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}_+$ ustrezna nenegativna funkcija. Privzemite običajni binomski model, ko se cena delnice, ki je trenutno enaka s_j , lahko spremeni v ali s_{2j+1} ali s_{2j+2} . Upoštevajte, da je obrestna mera konstantna in enaka r .

- a. Označite z $v_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$ vrednost opcije v trenutku t , če je bil dosedanji potek cen delnice $s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$. Izrazite $v_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$ s količinama

$$v_{t+1}(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, s_{2j_t+1}) \quad \text{in} \quad v_{t+1}(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, s_{2j_t+2}).$$

- b. Označite s

$$x_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}) \quad \text{in} \quad y_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t})$$

varovalno listnico, ki jo morate imeti v trenutku t , če je bil potek cen delnice $s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$. Izpeljite ustrezne rekurzivne formule za par (x_t, y_t) .

- c. Prepričajte se, da je

$$v_0(s_0) = E^* \left[(1+r)^{-T} f(S_0, S_1, \dots, S_T) \right],$$

če matematično upanje E računamo na podlagi martingalskih verjetnosti.

- d. Prepričajte se, da je

$$\begin{aligned} & \tilde{v}_t(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}) \\ &= E \left[\tilde{V}_n(s_0, s_{j_1}, \dots, s_{j_t}, S_{t+1}, \dots, S_T) | S_0 = s_0, \dots, S_t = s_{j_t} \right]. \end{aligned}$$

- e. Vzemite konkretni primer binomskega modela in naj bo

$$f(S_0, \dots, S_T) = \left(\frac{S_0 + \dots + S_T}{T+1} - c \right)_+$$

za neko izvršno ceno c . Zapišite konkretno rekurzivne formule iz točk a.-c.

- f. Napišite program, ki bo izračunal ceno azijske opcije za binomski model. Vsi parametri naj bodo spremenljivke, ki jim lahko damo vrednost na začetku. Število korakov T naj bo zmerno.

2. Na

<https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/history/>

si izberite tri delnice. Med te tri delnice želite razmestiti enoto denarja kot naložbo čez naslednje leto.

- Kako bi ocenili kovariančno matriko Σ ?
- Kako bi ocenili pričakovane donose?
- Izberite si želen donos in poiščite portfelj z najmanjšo varianco.
- Vzemite podatke brez zadnjega leta. Poglejte, kako bi se obnesel več optimalni portfelj.