Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT MF

Finančna matematika

Pisni izpit

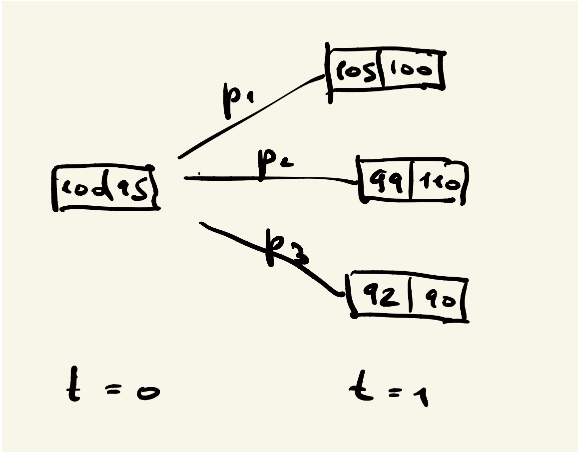
12. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva sta dva A4 format lista an obeh straneh s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.				•	
2.				•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

1. (25) Predpostavite, da so možni poteki cen dveh delnic za $t = 0, 1$ dani na spodnji sliki. Prva številka vedno predstavlja ceno prve delnice, druga pa druge. Poleg dveh delnic imamo še gotovinski račun. Predpostavite, da je obrestna mera enaka $r = 0$.



Možni poteki cen delnic v časih $t = 0, 1$.

a. (10) Pokažite, da model dopušča arbitražo.

Rešitev: pokazati moramo, da za veje v drevesu ne moremo izbrati pozitivnih verjetnosti p_1, p_2, p_3, da bi bile cene delnic (diskontirane cene so za $r = 0$ enake nediskontiranim) martingali. Veljati bi moralo

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ 105p_1 + 99p_2 + 92p_3 &= 100 \\ 100p_1 + 110p_2 + 90p_3 &= 95 \end{aligned}$$

Ta sistem linearnih enačb je enolično rešljiv. Dobimo $p_1 = 1/2$,$p_2 = 0$ in $p_3 = 1/2$. Ker verjetnosti niso pozitivne, obstaja arbitraža.

b. (5) V času $t = 0$ sestavimo portfelj $(100, -96, 100)$, kjer prva številka pomeni gotovino, druga število prvih in tretja število drugih delnic. Pokažite, da ta trojica omogoča arbitražo.

Rešitev: v času $t = 0$ je vrednost portfelja enaka

$$100 - 96 \cdot 100 + 100 \cdot 95 = 0\,.$$

V času $t = 1$ so možne vrednosti enake:

$$\begin{aligned} 100 - 96 \cdot 105 + 100 \cdot 100 &= 20 \\ 100 - 96 \cdot 99 + 100 \cdot 110 &= 1596 \\ 100 - 96 \cdot 92 + 100 \cdot 90 &= 268 \end{aligned}$$

Začnemo s portfeljem vrednim 0, na koncu pa so vrednosti pozitivne.

c. (10) Najdite še kakšen primer arbitraže.

Rešitev: če smo našli en primer arbitraže, je vsak pozitiven večkratnik tudi primer arbitraže. Sicer pa iščemo trojice (x, y_1, y_2)*, za katere je*

$$x + 100 \cdot y_1 + 95 \cdot y_2 = 0\,.$$

Vse take trojice so oblike

$$\lambda(0, -95, 100) + \mu(-100, 1, 0)$$

za ustrezna λ *in* μ*. Izbira* $\lambda = 1$ *in* $\mu = -2$ *da trojico* $(200, -97, 100)$*. Preverimo lahko, da smo našli arbitražo.*

2. (25) Predpostavite, da cena delnic $S_0, S_1, \ldots, S_T$ sledi binomskemu modelu s faktorjema $d < 1 < 1 + r < u$, kjer je r obrestna mera. Digitalna opcija izplača imetniku enoto denarja, če cena delnice v celotnem obdobju vsaj enkrat preseže prag a, kjer je a dano pozitivno število z $a > 0$. Bolj matematično je

$$V_T = 1\left(\max_{0 \le t \le T} S_t \ge a\right).$$

Privzemite, da je $a = u^m d^{T-m}$ za vnaprej dan $1 \le m \le T$.

a. (5) Privzemite, da S_t v nekem trenutku $t < T$ preseže prag a. Kakšni so pari $(H_t^0, H_t), \ldots, (H_T^0, H_T)$?

Rešitev: če S_t preseže prag a, potem je izplačilo v tistem trenutku vnaprej znano in neodvisno od gibanja cene delnice od trenutka t naprej. Sledi, da je

$$H_t^0 = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \quad \text{in} \quad H_t = 0\,.$$

b. (10) Predpostavite, da se na vsakem koraku cena delnice množi z u z verjetnostjo p in z d z verjetnostjo q. Predpostavite, da poznate verjetnosti

$$p(k, p, T) = P\left(\max_{0 \le t \le T} S_t \ge S_0 u^k d^{T-k}\right)$$

za vse možne p. Izrazite V_0 za digitalno opcijo.

Rešitev: načeloma je

$$V_0 = E^*\left(\tilde{V}_T\right),$$

kjer se računanje pričakovane vrednosti nanaša na martingalski verjetnosti p^* in q^*. V našem primeru je to

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E^*\left(1\left(\max_{0 \le t \le T} S_t \ge S_0 u^m d^{T-m}\right)\right).$$

Z zgornjimi oznakami sledi

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^T} p(m, p^*, T)\,.$$

c. (10) Izračunajte H_0.

Rešitev: naj bo $V_1(S_1)$ vrednost digitalne opcije v $t = 1$ v odvisnosti od S_1. Vemo, da je

$$H_0 = \frac{\tilde{V}_1(uS_0) - \tilde{V}_1(dS_0)}{uS_0 - dS_0)}\,.$$

Ker je $m \ge 1$, imamo v primeru, da se cena premakne v uS_0 v rokah spet digitalno opcijo, vendar mora ta doseči le prag $S_0 u^{m-1} d^{T-1-m}$. V primeru, da se cena premakne na dS_0, pa je razmislek enak, le prag je $S_o u^{m+1} d^{T-2-m}$. V obeh primerih je dospelost v času $T - 1$. Sledi

$$H_0 = \frac{1}{(1+r)(u-d)S_0}\left(p(m-1, p^*, T-1) - p(m+1, T-1, p^*)\right).$$

3. (25) Naj bo $X_0 \sim U(0,1)$ in $Z \sim U(0,1)$ neodvisna od X_0. Definiramo

$$X_1 = \frac{1}{2}(X_0 + Z_1)$$

a. (10) Izračunajte $E(X_1|X_0)$.

Rešitev: zaradi linearnosti je

$$E(X_1|X_0) = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{4}\,,$$

pri čemer smo upoštevali predpostavko o neodvisnosti.

b. (15) Najdite čas ustavljanja ν, da bo pričakovana vrednost $E(X_\nu)$ največja možna. Kolikšna je največja možna pričakovana vrednost?

Rešitev: za Snellovo ovojnico je $U_1 = X_1$ *in*

$$U_0 = \max\left(X_0, \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{4}\right)\,.$$

Pravilo odločanja je naslednje: če je $X_0 \geq \frac{1}{2}$*, je* $\nu = 0$*, sicer je* $\nu = 1$*. Največja možna pričakovana vrednost je* $E(U_0)$*. Računamo*

$$\begin{aligned} E(U_0) &= E\left(\left(\frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{4}\right) \cdot 1\left(X_0 < \frac{1}{2}\right)\right) + E\left(X_0 \cdot 1\left(X_0 \geq \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) dx + \int_{1/2}^1 x dx \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8}\,. \end{aligned}$$

4. (25) V portfelju treh delnic so pričakovani donosi $r_1 = 0,01$, $r_2 = 0,02$ in $r_3 = 0,03$. Matrika korelacij med posameznimi donosi R_1, R_2 in R_3 je

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

a. (15) Enoto denarja razmestite med posamezne delnice na tak način, da bo imel portfelj najmanjšo možno varianco. Kolikšen je donos takega portfelja?

Rešitev: definiramo vektorje

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \\ 0,03 \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Velja

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Izračunamo

$$\alpha = \mathbf{e}^T \mathbf{V} \mathbf{e} = 19 \,, \quad \beta = \mathbf{e}^T \mathbf{V} \mathbf{r} = 0,39 \quad \textit{in} \quad \gamma = \mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{r} = 0,0089$$

ter

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0,017 \,.$$

Varianca kot funkcija želenega donosa μ je dana kot

$$f(\mu) = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta} \,.$$

Funkcija doseže minimum $0,0625$ v

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = 0,0205 \,.$$

Računamo naprej

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} = 0,0526 \quad \textit{in} \quad \nu = \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta} = 0 \,.$$

Optimalna razmestitev je

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{V}\mathbf{e} + \nu \mathbf{V}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,2632 \\ 0,4211 \\ 0,3158 \end{pmatrix} .$$

b. (10) Privzemite, da smo pripravljeni sprejeti tako tveganje, da je standardni odklon portfelja σ največ 0,5. Kolikšen je največji donos, ki ga lahko dosežemo pri tej omejitvi?

Rešitev: če želimo največji možen donos, moramo izbrati portfelj na učinkovitostni meji, kar pomeni, da mora točka (σ, μ) *ustrezati enačbi*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}\,.$$

Kvadriramo in dobimo kvadratno enačbo, ki ima dve rešitvi za μ. *Izberemo večjo rešitev in dobimo* $\mu = 0,0338$.