Ime in priimek: ______________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT MF

Finančna matematika

Pisni izpit

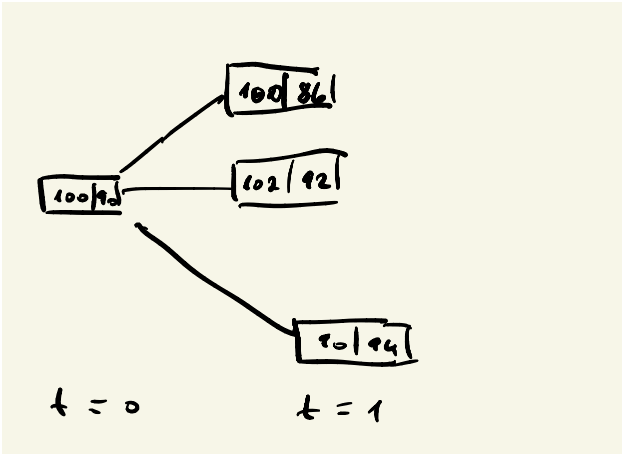
10. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa sta dva A4 format lista an obeh straneh s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.				•	
3.				•	
4.			•	•	
Total					

1. (25) Predpostavite, da so možni poteki cen dveh delnic za $t = 0, 1$ dani na Sliki 1. Prva številka vedno predstavlja ceno prve delnice, druga pa druge. Poleg dveh delnic imamo še gotovinski račun. Predpostavite, da je obrestna mera enaka $r = 0$.



Sl. 1: Možni poteki cen delnic v časih $t = 0, 1$.

a. (10) Pokažite, da model ne dopušča arbitraže in lahko repliciramo vsako opcijo.

Rešitev: pokazati moramo, da za veje v drevesu lahko izberemo pozitive verjetnosti p_1, p_2, p_3, da so cene delnic (diskontirane cene so za $r = 0$ enake nediskontiranim) martingali. Veljati mora

$$
\begin{aligned}
p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\
100p_1 + 102p_2 + 90p_3 &= 100 \\
86p_1 + 92p_2 + 94p_3 &= 90
\end{aligned}
$$

Ta sistem linearnih enačb je enolično rešljiv in dobimo pozitivne rešitve. Po izrekih lahko repliciramo vsako opcijo.

b. (15) Recimo, da opcija v trenutku $t = 1$ izplača absolutno vrednost razlike med cenama delnic. Izračunajte vrednost opcije v trenutku $t = 0$ in opišite varovalni portfelj zanjo.

Rešitev: v času $t = 0$ sestavimo portfelj, ki vsebuje x enot gotovine, y enot prve delnice in z enot druge delnice. Veljati morajo enačbe

$$
\begin{aligned}
x + 100y + 86z &= 4 \\
x + 102y + 92z &= 10 \\
x + 90y + 94y &= 4
\end{aligned}
$$

Dobimo $y = 12/19$, $z = 15/19$ in $x = -2414/19$. Vrednost opcije bo

$$V_0 = 136/19\,.$$

2. (25) Predpostavite, da cena delnic $S_0, S_1, \ldots, S_T$ sledi binomskemu modelu s faktorjema $d < 1 < 1 + r < u$, kjer je r obrestna mera. Barierna opcija je enaka evropski nakupni opciji z izvršno ceno K , le da v primeru, ko cena delnice pred dospetjem doseže ali preseže nivo a, ugasne, kar pomeni, da je vrednost opcije ob dospetju enaka 0. Bolj matematično je

$$V_T = (S_T - K)_+ \cdot 1\left(\max_{0 \le t \le T} S_t < a\right) .$$

Privzemite, da je $a = u^m d^{T-m} > V_0$ za vnaprej dan $1 \le m \le T$.

a. (5) Privzemite, da S_t v nekem trenutku $t < T$ preseže prag a. Kakšni so pari $(H_t^0, H_t), \ldots, (H_T^0, H_T)$?

   Rešitev: ker opcija ugasne, izdajatelj nima več obveznosti, tako da so po tem trenutku vsi pari enaki $(0, 0)$.

b. (10) Predpostavite, da se na vsakem koraku cena delnice množi z u z verjetnostjo p in z d z verjetnostjo q. Predpostavite, da poznate verjetnosti

$$r(p, t, k, m) = P\left(S_t = S_0 u^k d^{t-k}, \max_{0 \le s \le t} S_s = S_0 u^m d^{t-m}\right) .$$

   za vse možne p in $k = 0, 1, \ldots, t$ ter $m = k, k+1, \ldots, t$. Izrazite V_0 za barierno opcijo.

   Rešitev: načeloma je

$$V_0 = E^*\left(\tilde{V}_T\right) ,$$

   kjer se računanje pričakovane vrednosti nanaša na martingalski verjetnosti p^* *in* q^*. *V našem primeru je to*

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E^*\left(\tilde{V}_T\right) .$$

   Z zgornjimi oznakami sledi

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{l < m, 0 \le k \le T} (S_0 u^k d^{T-k} - K)_+ r(p^*, T, k, l) .$$

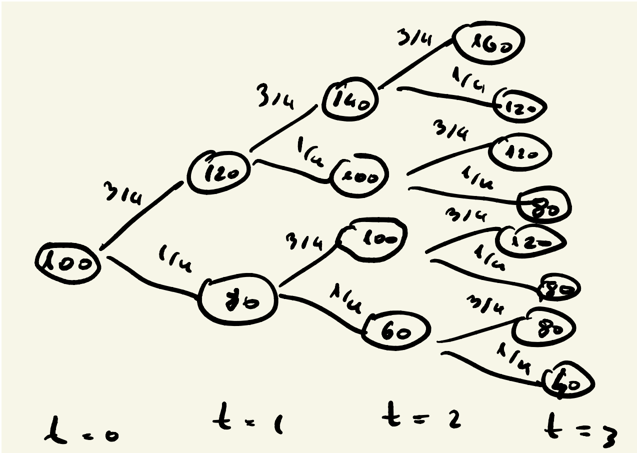
c. (10) Izrazite H_0 z verjetnostmi $r(p, t, k, l)$.

   Rešitev: naj bo $V_1(S_1)$ *vrednost digitalne opcije v* $t = 1$ *v odvisnosti od* S_1. *Vemo, da je*

$$H_0 = \frac{\tilde{V}_1(uS_0) - \tilde{V}_1(dS_0)}{uS_0 - dS_0)} .$$

   Ker je $m \ge 1$, *imamo v primeru, da se cena premakne v* uS_0 *v rokah spet barierno opcijo, vendar ta ugasne, ko doseže prag* $S_0 u^{m-1} d^{T-1-m}$. *V primeru, da se cena premakne na* dS_0, *pa je razmislek enak, le prag je* $S_0 u^{m+1} d^{T-2-m}$. *V obeh primerih je dospelost v času* $T - 1$.

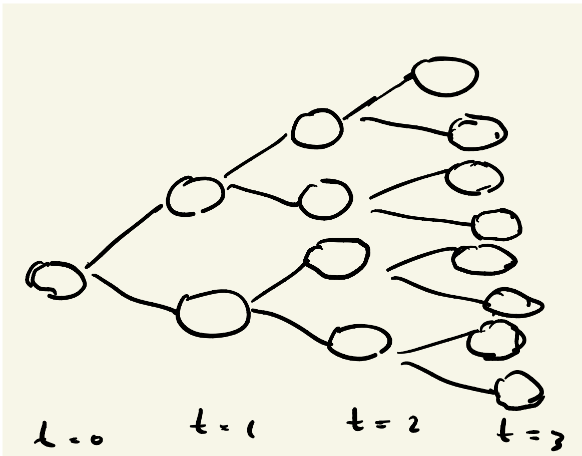
3. (25) Možni poteki cen delnice v trenutkih $t = 0, 1, 2, 3$ so na Sliki 3. Na vejah so verjetnosti za posamezne pomike cen.



Možni poteki cen delnic v časih $t = 0, 1$.

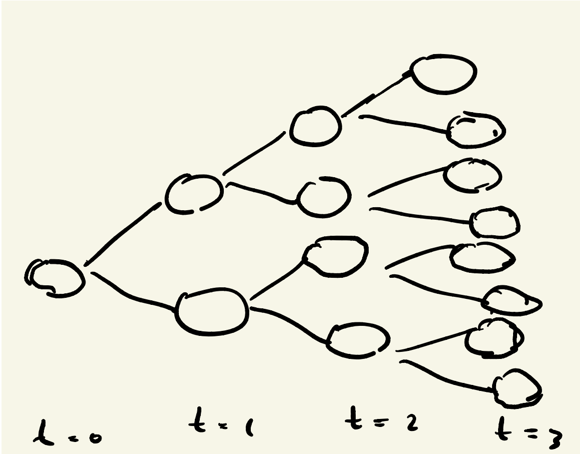
Ameriška prodajna opcija z izvršno ceno K nam omogoča, da se v vsakem vozlišču lahko odločimo, da delnico prodamo za ceno K. Izplačilo je potem $(K - S_t)_+$. Vzemite $K = 90$.

a. (5) V prazen graf vpišite vrednost ameriške opcije v vsakem vozlišču.



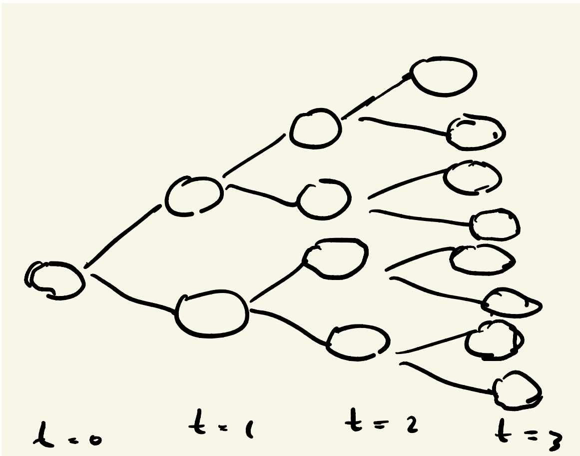
Solution: glej rdeča števila na Sliki 3.

b. (10) V prazen graf vpišite vrednosti Snellove ovojnice za proces ameriške opcije za vsako vozlišče.

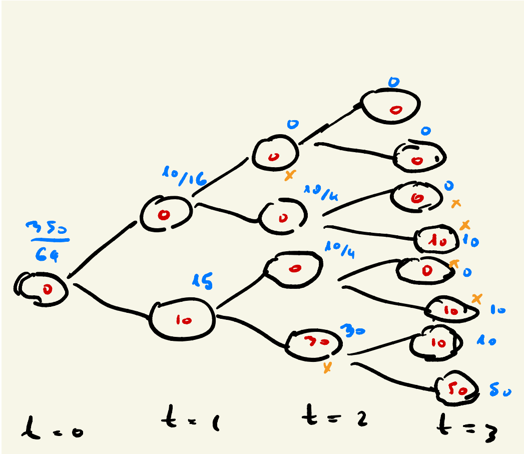


Solution: Snellova ovojnica za $t = 3$ je enaka vrednosti ameriške opcije v trenutku $t = 3$. V času $t = 2$ izračunamo pogojno pričakovano vrednost in vpišemo ali to ali pa trenutno vrednost američke opcije, če je ta večje. Tako se pomikamo nazaj po drevesu do $t = 0$. Na Sliki 3 so vrednosti Snellove ovojnice napisane z modro.

c. (10) Na praznem grafu označite vozlišča, v katerih bi izvršili ameriško opcijo da bi bil pričakovan izkupiček največji možen. Kolikšen je ta najboljši pričakovan izkupiček?



Solution: ameriško opcijo prodamo v prvem vozlišču, kjer je trenutna vrednost Snellove ovojnice enaka trenutni vrednosti ameriške opcije. Na Sliki 3 so ta vozlišča označena z oranžnimi križci. Največji možen izkupiček je $U_0 = 350/64$.



Slika 3: iskane vrednosti.

4. (25) V portfelju treh delnic so pričakovani donosi $r_1 = 0,01$, $r_2 = 0,02$ in $r_3 = 0,03$. Matrika korelacij med posameznimi donosi R_1, R_2 in R_3 je

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0.05 & -0.05 \\ -0.05 & 0,2 & -0.05 \\ -0.05 & -0.05 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a. (5) Inverz matrike Σ je oblike

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Najdite a in b.

Rešitev: množenje prve vrstice matrike $\mathbf{\Sigma}$ in prvega stolpca $\mathbf{V}$ nam da enačbo $0,2a - 0.1b = 1$, množenje prve vrstice $\mathbf{\Sigma}$ in in drugega stolpca $\mathbf{V}$ pa $-0,05a + 0,15b = 0$. Rešimo enačbi in dobimo $a = 6$ in $b = 2$.

b. (10) Enoto denarja razmestite med posamezne delnice na tak način, da bo imel portfelj najmanjšo možno varianco. Kolikšen je donos takega portfelja?

Rešitev: definiramo vektorje

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \\ 0,03 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunamo

$$\alpha = \mathbf{e}^T\mathbf{V}\mathbf{e} = 30\,, \quad \beta = \mathbf{e}^T\mathbf{V}\mathbf{r} = 0,60 \quad \text{in} \quad \gamma = \mathbf{r}^T\mathbf{V}\mathbf{r} = 0,0128$$

ter

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0,0240\,.$$

Varianca kot funkcija želenega donosa μ je dana kot

$$f(\mu) = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}\,.$$

Funkcija doseže minimum $0,0625$ v

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = 0,0200\,.$$

Računamo naprej

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} = 0,0333 \quad \text{in} \quad \nu = \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta} = 0\,.$$

Optimalna razmestitev je

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{V}\mathbf{e} + \nu\mathbf{V}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,3333 \\ 0,3333 \\ 0,3333 \end{pmatrix}.$$

Minimalna varianca je $\sigma^2 = 0,0333$.

b. (10) Privzemite, da lahko investiramo tudi v netvegan račun z donosom $r = 0,012$. Od enote denarja investiramo 0,1 v netvegan račun, ostanek pa v tvegane delnice. Pri želenem pričakovanem donosu $\mu = 0,02$ najdite portfelj z najmanjšo možno varianco.

Rešitev: če želimo pričakovan donos $0,02$, *mora donos* μ' *portfelja delnic ustrezati enačbi* $r \cdot 0,1 + \mu' \cdot 0,9 = 0,02$. *To pomeni, da je* $\mu' = 0.0209$. *Problem se prevede na iskanje optimalnih deležev pri tem novem pričakovanem donosu. Izračunamo*

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta\mu'}{\delta} = 0,0111 \quad \textit{in} \quad \nu = \frac{\alpha\mu' - \beta}{\delta} = 1,1111\,.$$

in

$$\mathbf{y} = 0.9 \cdot (\lambda \mathbf{V}\mathbf{e} + \nu \mathbf{V}\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0,2599 \\ 0,3001 \\ 0,3400 \end{pmatrix}\,.$$