1 Moč testa

Iz literature lahko povzamemo, da se športnikovo povprečje hemoglobina ob vsaj 14-dnevnem bivanju na višini nad 1500m zviša za 2 g/l, medtem ko višinski treningi ne vplivajo na varianco njegovih vrednosti. Ob običajnih treningih se posameznikove vrednosti porazdeljujejo normalno, $X \sim N(\mu_1, 5^2)$, kjer je μ_1 športnikovo povprečje.
Športnik pogosto opravlja višinske treninge, vendar v krajših intervalih. Zanima ga, ali se njegovo povprečje hemoglobina v obdobju višinskih treningov kljub temu zviša. V sezoni opravi 12 meritev, 8 med obdobjem višinskih priprav in 4 sicer. Kakšna bo moč njegovega testa, če bo pri sklepanju uporabil stopnjo značilnosti $\alpha = 0{,}05$?

- Kaj je športnikova ničelna in kaj alternativna domneva?

  Predpostavljamo, da se hemoglobin v obdobju višinskih priprav porazdeljuje kot $N(\mu_2{,}5^2)$. Ničelna domneva je:
  H_0: Povprečje hemoglobina v obeh obdobjih je enako, $\mu_1 = \mu_2$.
  Alternativna domneva je, da je $\mu_2 > \mu_1$, zanima ga torej le enostranski test.

- Kakšno testno statistiko bo uporabil za preverjanje ničelne domneve?

  Športnik bo izračunal razliko povprečij na vzorcih, ki je porazdeljena kot

  $$R = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_2 - \mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

  Testna statistika

  $$Z = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}}$$

  je torej pod ničelno domnevo porazdeljena standardno normalno. Ker ga zanima le enostranska alternativna domneva, bo ničelno domnevo zavrnil, kadar bo $Z > z_\alpha$, torej $Z > 1{,}64$.

- Izračunajte moč testa, torej verjetnost, da bo ničelno domnevo zavrnil, če se mu povprečje hemoglobina v obdobju višinskih priprav zares poveča za 2 g/l?

  Zanima nas $P(Z > 1{,}64)$, torej $P(R > 1{,}64 \cdot \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$, torej v našem primeru $P(R > 4{,}73)$. Pod alternativno domnevo je $R \sim N\left(2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$ in zato

  $$P\left(R > 1{,}64 \cdot \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - 2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} > 1{,}64 - \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}}\right)$$

  $$P\left(U > 1{,}64 - \frac{2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right),$$

  kjer je U standardna normalna spremenljivka. V našem primeru:

  $$P\left(U > 1{,}64 - \frac{2}{5\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}}\right) = P(U > 0\ 99) = 0{,}16 \qquad (1)$$

  Moč testa je zelo majhna - pri tako majhnem številu meritev je le majhna verjetnost, da bo športnik zavrnil ničelno domnevo.

- Kako bi se moč testa spremenila, če bi imel na voljo enako število meritev v vsakem obdobju?

  Če bi imel po 6 meritev v vsakem obdobju, bi bila moč enaka

  $$P\left(U > 1{,}64 - \frac{2}{5\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}}\right) = P(U > 0{,}95) = 0{,}17$$

- Kako je moč testa odvisna od variance posameznikovih meritev in kako od dejanske velikosti razlike v populaciji?

  Iz enačbe (1) je očitno, da večja razlika pomeni večjo moč - če je dejanska razlika med obdobjema večja, jo bomo lažje opazili na podatkih. Če bi bila varianca posameznikovih meritev manjša, bi imeli manjšo standardno napako in zato večjo moč testa.

2 Test razmerja verjetij

Zanima nas ali imajo zares vsi športniki enako variabilnost hemoglobina. Primerjati želimo meritve k športnikov, naj bodo vrednosti i-tega športnika ($i = 1, \ldots, k$) porazdeljene normalno, torej $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, kjer $j = 1, \ldots, n_i$ označujejo meritve pri posamezniku. Predpostavimo, da so vse meritve med seboj neodvisne.

- Zapišite ničelno in alternativno domnevo

  Ničelna domneva:
  $$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

  Alternativna domneva: $H_1 : \sigma_i^2$ niso vse enake

- Najprej vzemimo, da imamo le enega športnika in n njegovih meritev. Kako bi ocenili njegova parametra μ in σ^2 z metodo največjega verjetja? Funkcija verjetja je enaka

  $$lik(x, \mu, \sigma) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2},$$

  del njenega logaritma v katerem nastopata parametra, ki ju želimo oceniti pa je enak

  $$\log l(x, \mu, \sigma) = -n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2.$$

  Poiščimo maksimum po μ:

  $$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(x, \mu, \sigma)}{\partial \mu} &= 0 \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)(-2) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu) &= 0 \\ \widehat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \end{aligned}$$

Pa še za varianco:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log l(x,\mu,\sigma)}{\partial \sigma} &= 0 \\
\frac{n}{\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2\frac{-2}{\sigma^3} &= 0 \\
\sigma^2 n + \sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 &= 0 \\
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2
\end{aligned}$$

- Utemeljite, da so pod alternativno domnevo ocene parametrov enake

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_i &= \frac{1}{n_i}\sum x_{ij} \\
\hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\hat{\mu}_i)^2
\end{aligned}$$

Funkcija verjetja pod alternativno domnevo je enaka

$$l(x,\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp -\frac{(x_{ij}-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$$

Funkcijo logaritmiramo, del v katerem nastopata parametra za nek i je neodvisen od ostalih delov in zato enak tistemu, kar bi dobili, če bi imeli le posameznika i. Zato dobimo gornji oceni.

- Kakšna je ocena povprečij pod ničelno domnevo?
Pod ničelno domnevo je σ_i enak za vse i, zato ga v logaritmu funkcije verjetja lahko izpostavimo in ne vpliva na našo oceno posameznih povprečij. Ocena posameznih povprečij je zato enaka kot pod alternativno domnevo.

- Kakšna je ocena variance pod ničelno domnevo?
Del logaritma funkcije verjetja, ki nas zanima, je enak

$$\log l(x, \mu, \sigma) = -\sum_{i=1}^{k} n_i \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2.$$

Odvod po σ izenačimo z 0 in dobimo

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)^2$$

- Kako bi ničelno domnevo preverili s testom razmerja verjetij?

  Zapišemo Wilksov Λ (zgoraj je funkcija verjetja pod alternativno domnevo, spodaj pod ničelno):

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma}_i} \exp\{-\frac{(x_{ij}-\widehat{\mu}_i)^2}{2\widehat{\sigma}_i^2}\} \right)}{\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma}_0} \exp\{-\frac{(x_{ij}-\widehat{\mu}_{0i})^2}{2\widehat{\sigma}_0^2}\} \right)} \\ &= \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma}_i} \right) \prod\limits_{i=1}^{k} \exp\{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\widehat{\mu}_i)^2}{2\widehat{\sigma}_i^2}\}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma}_0} \right) \exp\{-\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} \frac{(x_{ij}-\widehat{\mu}_{0i})^2}{2\widehat{\sigma}_0^2}\}} \end{aligned}$$

  Vstavimo ocene za variance v eksponent in tako v števcu kot tudi v imenovalcu dobimo $\exp\{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\}$, ki se zato pokrajša. Logaritem Λ je enak

$$\begin{aligned} \log \Lambda &= -\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \log(\widehat{\sigma}_i) \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \log(\widehat{\sigma}_0) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\widehat{\sigma}_0) \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\widehat{\sigma}_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\log(\widehat{\sigma}_0) - \log(\widehat{\sigma}_i) \right] \end{aligned}$$

Dvakratna vrednost logaritma verjetij je porazdeljena kot χ^2_{k-1}, saj smo pod alternativno domnevo ocenili $k-1$ parametrov več kot pod ničelno.