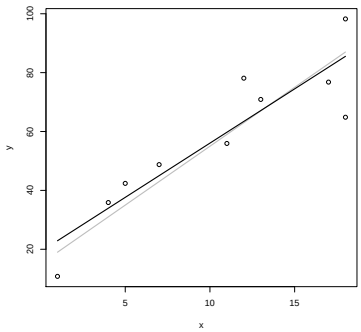
1 Linearna regresija

Zanima nas povezanost števila ur učenja na teden z rezultatom na izpitu iz statistike. Vzemimo, da vemo, da se rezultat na izpitu v populaciji porazdeljuje pogojno normalno: $Y|X \sim N(\beta_0 + \beta_1 X, \sigma^2)$.

- Naj bo X enakomerno porazdeljena spremenljivka (med 0 in 20, zaokrožena navzdol), $\beta_0 = 15$, $\beta_1 = 4$, $\sigma = 10$. Generirajte vzorec velikosti 10, narišite podatke in vrišite populacijsko ter ocenjeno vrednost premice.

```
> set.seed(1)
> n <- 10                                      #velikost vzorca
> beta0 <- 15
> beta1 <- 4
> sigma <- 10
> x <- floor(runif(n)*20)                      #navzdol zaokrozene vrednosti x
> x <- sort(x)                                 #uredimo podatke po velikosti x
> y <- rnorm(n,mean=beta0+beta1*x,sd=sigma)    #generiramo iz normalne porazdelitve
> plot(x,y)                                    #narisemo tocke
> popul <- beta0 + beta1*x                     #populacijska vrednost premice
> lines(x,popul,col="grey",lwd=2)              #dodamo populacijsko vrednost premice v sivi barvi
> fit <- lm(y~x)                               #ocenimo premico na podatkih
> summary(fit)                                 #ogledamo si ocene koeficientov
> beta0h <- fit$coef[1]                       #ocenjena beta0
> beta1h <- fit$coef[2]                       #ocenjena beta1
> napoved <- beta0h + beta1h*x
> lines(x,napoved,lwd=2)                            #vrisemo ocenjeno premico na sliko
```



Slika 1: *Točke na vzorcu, ocenjena premica (črna) in populacijska premica (siva).*

- Iz spodnjega izpisa preberite ocene populacijskih parametrov. Interpretirajte rezultate, katere ničelne domneve so testirane in kako?

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-20.683  -4.746   2.844   4.512  14.693

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  19.2049     7.5172   2.555 0.033921 *
x             3.6850     0.6217   5.927 0.000351 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 11.44 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.8145,     Adjusted R-squared: 0.7913
F-statistic: 35.13 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.0003508
```

Ocene parametrov so $\widehat{\beta}_0 = 19{,}2$, $\widehat{\beta}_1 = 3{,}7$, $\widehat{\sigma} = 11{,}4$. Testirani sta dve ničelni domnevi: $H_{0int} : \beta_0 = 0$ in $H_0 : \beta_1 = 0$. Pri linearni regresiji nas ponavadi zanima le druga - saj ta govori o povezanosti med spremenljivkama v populaciji. Metoda največjega verjetja nam pove, da se ocene parametrov okrog prave vrednosti porazdeljujejo približno normalno (za dovolj velik n). Standardna napaka je ocenjena iz podatkov, uporabimo test t:

$$T = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{SE_{\beta_1}}} = \frac{3{,}7}{0{,}6} = 5{,}9$$

Vemo, da je slučajna spremenljivka T porazdeljena približno kot t z 8 stopinjami prostosti (pri ocenjevanju SE porabimo dve stopinji prostosti). Ta test se imenuje Waldov test.

- Kako bi ničelno domnevo $H_0 : \beta_1 = 0$ preverili s testom razmerja verjetij?
  Uporabite rezultat, da ocena $\widehat{\sigma}$ po metodi največjega verjetja ni nepristranska in je enaka

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{\beta}_0 - x_i\widehat{\beta}_1)^2}{n}$$

Izračunati moramo vrednost maksimuma funkcije verjetja pod ničelno in alternativno domnevo. Funkcija verjetja je enaka:

$$l(y, x, \beta_0, \beta_1, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}\}$$

Maksimum funkcije verjetja je enak

$$\begin{aligned} l(y, x, \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma})^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i)^2}{2\widehat{\sigma}^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma})^n} \exp\left\{-\frac{n\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i)^2}{2\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\widehat{\sigma})^n} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} \end{aligned}$$

Logaritem funkcije verjetja v ocenjenih vrednostih je zato enak

$$\begin{aligned} &\log l(y, x, \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}) = \\ &= -\frac{n}{2}\left(\log(2\pi) - \log[\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i)^2] + \log n - 1\right) \end{aligned}$$

Vrednost maksimuma pod alternativno domnevo izračunamo tako, da vstavimo ocenjene $\widehat{\beta}_0$ in $\widehat{\beta}_1$, za izračun vrednosti pod ničelno domnevo moramo oceniti še β_0 v ničelnem modelu. Dobljeni Wilksov Λ se porazdeljuje kot χ^2_1.

```
> fit0 <- lm(y~1)                          #ocenimo premico pod nicelno domnevo - le konstanta
> res0 <- y - fit0$coef                    #ostanki pod nicelno domnevo
> resA <- y - beta0h - beta1h*x            #ostanki pod alternativno domnevo
> logl0 <- .5*n*(-log(2*pi) - log(sum(res0^2))+log(n) - 1 )   #loglik pod nicelno
> loglA <- .5*n*(-log(2*pi) - log(sum(resA^2))+log(n) - 1 )   #loglik pod alternativno
> Lambda <- 2*(loglA-logl0)                #Wilksov lambda
> 1-pchisq(Lambda,1)                       #likelihood ratio test
[1] 4.048e-05
```

2 Matrično računanje

Vrednosti neodvisnih spremenljivk združimo v matriko X (design matrix), vrednosti odvisne spremenljivke ter koeficientov predstavljajo vektorja Y in β:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}; \; Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \; \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$

Matrika X je dimenzije $n \times (p+1)$, kjer je p število spremenljivk. Če naš model ne bi vseboval konstante, bi prvi stolpec X izpustili. V našem primeru imamo le eno neodvisno spremenljivko, matrika X je enaka:

```
> X <- cbind(1,x)                          #zlepimo dva stolpca
> X
         x
 [1,] 1  1
 [2,] 1  3
 [3,] 1  5
 [4,] 1  7
 [5,] 1  7
 [6,] 1  8
 [7,] 1 11
 [8,] 1 16
 [9,] 1 19
[10,] 1 19
> round(y)              #zaokrozimo za vecjo preglednost
 [1] 11 36 42 49 56 78 71 77 65 98
```

- Zapišite vsoto vrednosti $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ v matrični obliki.

$$Y^T Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2$$

- Kaj dobimo, če matrično pomnožimo $X\beta$?

$$X\beta = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{bmatrix} = E(Y)$$

- V matrični obliki oceno koeficientov po metodi najmanjših kvadratov (= po metodi največjega verjetja) zapišemo kot $\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Pokažite, da za $p = 1$ dobite oceni:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Izračunajmo najprej $X^T X$:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Inverz te 2×2 matrike je enak:

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

Izračunajmo še $X^T Y$:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \end{bmatrix}$$

Velja torej

$$
\begin{aligned}
(X^T X)^{-1} X^T Y &= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i + n \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$