Problem gladiatorjev

Predpostavljamo, da imamo dve skupini gladiatorjev z m in n borci. Njihove moči so $s_1, s_2, \ldots, s_m$ in $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Predpostavljamo, da v borbi dveh gladiatorjev z močema s in t zmaga prvi z verjetnostjo $s/(s+t)$ in drugi z verjetnostjo $t/(s+t)$. Predpostavljamo tudi, da so izidi posameznih spopadov neodvisni. Zmaga moštvo, ki eliminira vse nasprotnikove gladiatorje. Predpostavljajmo najprej, da obe moštvi pošiljata gladiatorje v boj v takem vrstnem redu, kot so oštevilčeni. Definirajmo

$$F_{m,n}(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) = P(\{\text{zmaga prvo moštvo}\}) .$$

Kot smo videli, je ta funkcija že za majhne vrednosti m in n zapletena. Iz formule za popolno verjetnost in predpostavke o neodvisnosti izidov posameznih spopadov sledi, da je

$$\begin{aligned} F_{m,n}\,(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) &= \\ = \quad \frac{s_1}{s_1+t_1} &\cdot F_{m,n-1}(s_1, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_n) \\ &\quad + \frac{t_1}{s_1+t_1} \cdot F_{m-1,n}(s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) . \end{aligned} \tag{1}$$

Veljata tudi robna pogoja

$$F_{1,n}(s_1; t_1, \ldots, t_n) = \frac{s_1}{s_1+t_1} \cdot \frac{s_1}{s_1+t_2} \cdots \frac{s_1}{s_1+t_n}$$

in

$$F_{m,1}(s_1, \ldots, s_m; t_1) = 1 - \frac{t_1}{s_1+t_1} \cdot \frac{t_1}{s_2+t_1} \cdots \frac{t_1}{s_m+t_1} .$$

Rakurzijske enačbe (1) in robni pogoji enolično določajo funkcijo $F_{m,n}$. V nadaljevanju bomo z uporabo zveznih porazdelitev pokazali, da je funkcija $F_{m,n}$ simetrična v argumentih $s_1, \ldots, s_m$ in $t_1, \ldots, t_n$. Iz tega izhaja, da ne obstaja strategija, s katero bi eno ali drugo moštvo lahko povečalo verjetnost za zmago. Torej ne obstaja optimalna izbira vrstnega reda, po katerem bi gladiatorje pošiljali v boj.

Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke. Prepostavljamo, da je $X \sim \exp(\lambda)$ in je $Z \geq 0$. Računamo z uporabo Fubinijevega izreka

$$
\begin{aligned}
& P\left(X \geq Y+Z, X \geq Z\right)= \\
& \quad = \int_{x \geq y+z, x \geq z} f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) dx dy dz \\
& \quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{x \geq z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
& \qquad + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{x \geq y+z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
& \quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \\
& \qquad + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{y+z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
& \quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda(y+z)} dz \\
& \quad = \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) e^{-\lambda y} dy \right).
\end{aligned}
$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
P(X \geq Z) &= \int_{x \geq z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
&= \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
P(X \geq Y) &= \int_{x \geq y} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) e^{-\lambda y} dy \,.
\end{aligned}
$$

Sledi, da je

$$P(X \geq Y+Z, X \geq Z) = P(X \geq Y)P(X \geq Z)\,. \tag{2}$$

Iz te enakosti izpeljemo

$$\begin{aligned} P(X < Y+Z, X \geq Z) &= P(X \geq Z) - P(X \geq Y+Z, X \geq Z) \qquad (3)\\ &= P(X \geq Z) - P(X \geq Y)P(X \geq Z)\\ &= P(X \geq Z)(1 - P(X \geq Z))\\ &= P(X < Y)P(X \geq Z)\,. \end{aligned}$$

Naj bodo $X_1, \ldots, X_m$ in $Y_1, \ldots, Y_n$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_i, Y_j \sim \exp(1)$. Definirajmo funkcijo

$$G_{m,n}(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) = P(s_1X_1 + \cdots + s_mX_m \geq t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n)\,.$$

Iz definicije izhaja, da je funkcija $G_{m,n}$ simetrična v prvih m argumentih in v drugih n argumentih. Definirajmo

$$A = \{s_1X_1 + \cdots + s_mX_m \geq t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n\}\,.$$

Zapišemo lahko

$$P(A) = P(A \cap \{s_1X_1 \geq t_1Y_1\}) + P(A \cap \{t_1Y_1 > s_1X_1\})\,. \tag{4}$$

Oglejmo si prvi člen v vsoti. Prepišemo ga lahko v

$$\begin{aligned} &P(A \cap \{s_1X_1 \geq t_1Y_1\}) =\\ &\quad= P\left(s_1X_1 \geq t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n - s_2X_2 - \cdots - s_mX_m, s_1X_1 \geq t_1Y_1\right)\\ &\quad= P\left(s_1X_1 \geq t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n - s_2X_2 + \cdots + s_mX_m\right)P\left(s_1X_1 \geq t_1Y_1\right)\\ &\quad= P\left(s_1X_1 + \cdots + s_mX_m \geq t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n\right)P\left(s_1Y_1 \geq t_1X_1\right)\,. \end{aligned}$$

Pri tem smo vloge v (2) porazdelili tako, da je $X = s_1X_1$, $Z = t_1Y_1$ in $Y = t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n - s_2X_2 + \cdots + s_mX_m$. Zlahka preverimo, da je

$$P\left(s_1X_1 \geq t_1Y_1\right) = \frac{s_1}{s_1 + t_1}\,,$$

tako da je prvi člen enak

$$\frac{s_1}{s_1+t_1}\cdot G_{m,n-1}(s_1,\ldots,s_m;t_2,\ldots,t_n)\,.$$

Iz enakosti (3) sledi za drugi člen

$$\begin{aligned}
&P(A\cap\{t_1Y_1>s_1X_1\}) = \\
&\quad = \; P(t_1Y_1<s_1X_1+s_2Y_2+\cdots+s_mX_m-t_2Y_2-\cdots-t_nY_n, t_1Y_1>s_1X_1) \\
&\quad = \; P\left(t_1Y_1<s_2Y_2+\cdots+s_mX_m-t_2Y_2-\cdots-t_nY_n\right)P(t_1Y_1>s_1X_1) \\
&\quad = \; P\left(s_2X_2+\ldots+s_mX_m>t_1Y_1+\cdots+t_nY_n\right)P(t_1Y_1>s_1X_1)
\end{aligned}$$

V tem primeru je bila porazdelitev vlog v (3) naslednja: $X=t_1Y_1$, $Y=s_2Y_2+\cdots+s_mX_m-t_2Y_2-\cdots-t_nY_n$ in $Z=s_1X_1$. Drugi člen v (4) je torej enak

$$\frac{t_1}{s_1+t_1}\cdot G_{m-1,n}(s_2,\ldots,s_m;t_1,\ldots,t_n)\,.$$

Funkcija $G_{m,n}$ ustreza natanko pravim rekurzijskim enačbam (1), kot verjetnosti $F_{m,n}$ v problemu gladiatorjev. Preveriti je treba le še, da ustreza tudi robnim pogojem. Po enakosti (2) za $m=1$ sledi

$$\begin{aligned}
&P\left(s_1X_1\geq t_1Y_1+\cdots+t_nY_n\right) = \\
&\quad = \; P\left(s_1X_1\geq t_1Y_1+\cdots+t_nY_n, s_1X_1\geq t_1Y_1\right) \\
&\quad = \; P\left(s_1X_1\geq t_2Y_2+\cdots+t_nY_n\right)P(s_1X_1\geq t_1Y_1) \\
&\quad = \; \frac{s_1}{s_1+t_1}\cdot P\left(s_1X_1\geq t_2Y_2+\cdots+t_nY_n\right)\,.
\end{aligned}$$

Z ponavljanjem dobimo pravi robni pogoj. Na enak način preverimo še to, da dobimo prave robne pogoje za $n=1$. Sledi, da je $F_{m,n}=G_{m,n}$.