

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

29. JUNIJ 2021

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženo navzgor. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bosta A in B dogodka ter $\epsilon > 0$. Predpostavite, da lahko najdemo dogodka A_ϵ in B_ϵ , za katera je

$$P((A \cap A_\epsilon^c) \cup (A^c \cap A_\epsilon)) < \epsilon \quad \text{in} \quad P((B \cap B_\epsilon^c) \cup (B^c \cap B_\epsilon)) < \epsilon.$$

Pokažite, da velja

$$|P(A \cap B) - P(A \cap A_\epsilon \cap B \cap B_\epsilon)| < 2\epsilon.$$

2. Naj za diskretne slučajne spremenljivke X , Y in Z velja

$$P(Z = z_m | X = x_k, Y = y_l) = P(Z = z_m | X = x_k)$$

za vsak možen par vrednosti x_k in y_l slučajnih spremenljivk X in Y in za vsako možno vrednost z_m . Pokažite, da je

$$P(Z = z_m, Y = y_l | X = x_k) = P(Z = z_m | X = x_k)P(Y = y_l | X = x_k)$$

za vse x_k , y_l in z_m .

3. Gostota Paretove porazdelitve je za $\alpha > 0$ dana z

$$f(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

za $x > 0$ in 0 sicer. Najdite gostoto slučajne spremenljivke

$$Y = \frac{1}{1+X}.$$

4. Celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj imata skupno porazdelitev oblike

$$P(X = k, Y = l) = f(k + l)g(k - l)$$

za $k, l \in \mathbb{Z}$. Ali sta $X + Y$ in $X - Y$ neodvisni?

5. Naj ima slučajni vektor (X, Y) gostoto oblike

$$f_{X,Y}(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

za $x, y \in \mathbb{R}$. Izrazite gostoto slučajne spremenljivke $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ s funkcijo h .

6. Naj bosta X, Y neodvisni in enako porazdeljeni, vsota $X + Y$ pa naj ima enako porazdelitev kot razlika $U - V$, kjer sta U, V neodvisni in $U, V \sim \Gamma(2, 1)$. Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X . Kot znano privzemite, da porazdelitev vsote $X + Y$ natanko določa porazdelitev X .

7. Naj bodo U, X in Y neodvisne z $E(X) = E(Y) = 0$ in $\text{var}(X) = \text{var}(Y) = 1$. Naj bo $U \sim U(0, 1)$. Izračunajte varianco vsote $\sqrt{U}X + \sqrt{1 - U}Y$.

8. Za celoštevilске slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots, X_n naj velja, da imajo vse ciklične permutacije oblike $X_k, X_{k+1}, \dots, X_n, X_1, \dots, X_{k-1}$ enako porazdelitev kot začetne slučajne spremenljivke. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Izračunajte

$$E(X_1 | S_n = m) .$$

Utemeljite vaše korake.

9. Za celoštevilске slučajne spremenljivke X, Y in Z naj velja

$$E(Z | X = k, Y = l) = E(Z | X = k)$$

za vse možne pare $k, l \in \mathbb{Z}$. Izračunajte

$$E(YZ | X = k) - E(Y | X = k)E(Z | X = k) .$$

10. Slučajne spremenljivke N, X_1, X_2, \dots so vse neodvisne, nenegativne celoštevilске. Privzemite, da je $X_k \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ za vse $k = 1, 2, \dots$. Naj bo $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke N , če je $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{6})$?

