Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

27. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženemu navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $A, B, A_1, A_2, \ldots$ dogodki, za katere velja

$$\lim_{n\to\infty} \left[P(A_n^c \cap A) + P(A_n \cap A^c)\right] = 0\,.$$

Za vsak $n \geq 1$ naj bosta dogodka A_n in B neodvisna. Utemeljite, da sta neodvisna tudi dogodka A in B.

2. Naj bo $U \sim U(0,1)$ in $\alpha > 0$. Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke

$$X = (-\log U)^{\alpha}\ .$$

3. Za diskreten slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_r)$ naj bo

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) = P(X_{\sigma(1)} = x_1, \ldots, X_{\sigma(r)} = x_r)$$

vse možne nabore $(x_1, \ldots, x_r)$ in vse možne permutacije $\sigma \in \mathbb{S}_r$. Ali imajo vse komponente $X_1, \ldots, X_r$ enako porazdelitev? Odgovor utemeljite.

4. Naj bodo X, Y in Z neodvisne in $X, Y, Z \sim \exp(1)$. Slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X + Y + Z} \quad \text{in} \quad V = \frac{Y}{Y + Z}$$

sta neodvisni. Utemeljite, zakaj.

5. Ali obstajata pozitivni neodvisni slučajni spremenljivki X in Y, za kateri bo $X + Y \sim \exp(1)$? Utemeljite vaš odgovor.

6. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, za katere je $X_k \sim \exp(1)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Definirajte

$$Y_k = \frac{X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$. Za $k < l$ izračunajte $\mathrm{cov}(Y_k, Y_l)$.

Namig: kaj je $\mathrm{cov}(Y_k, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$*? Simetrija?*

7. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ med sabo neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Dani naj bosta še simetrični matriki $\mathbf{A} = (a_{ij})$ in $\mathbf{B} = (b_{ij})$ velikosti $n \times n$. Pokažite, da je

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i,j} a_{ij} Z_i Z_j,\ \sum_{k,l} b_{kl} Z_k Z_l\right) = 2\,\mathrm{Sl}\,(\mathbf{AB}) \ .$$

Kot znano privzemite, da je $E(Z_i^4) = 3$.

8. Naj za celoštevilske slučajne spremenljivke X, Y in Z z $E(Y) = E(Z) = 0$ velja

$$E(YZ \mid X = n) = E(Y \mid X = n)\, E(Z \mid X = n)$$

za vse $n \in \mathbb{Z}$. Utemeljite, da je

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = \sum_n E(Y \mid X = n)\, E(Z \mid X = n)\, P(X = n)\,.$$

9. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki s končno mnogo vrednostmi. Predpostavite, da je

$$E(X \mid Y = y) = y \qquad \text{in} \qquad E(Y \mid X = x) = x$$

za vse možne vrednosti x oziroma y slučajnih spremenljivk X in Y. Utemeljite, da je $X = Y$ z verjetnostjo 1.

Namig: izračunajte $E\left[(X - Y)^2\right]$.

10. Za zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \ldots$ naj velja $X_0 = 1$ in za $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$P(X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k) = \frac{1}{1 + n} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = \frac{n}{1 + n}\,.$$

Izračunajte $G_n(s)$.