Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

26. marec 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki, za katere predpostavimo, da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^c \cap A_{k+1}\right) < \infty$$

in

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 0\,.$$

Pokažite, da je

$$P\left(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k\right) = 0\,.$$

2. Naj bodo slučajne spremenljivke W, W_1 in I neodvisne. Naj bo $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ za določen $p \in (0,1)$, W in W_1 pa nenegativni celoštevilski z enako porazdelitvijo. Naj velja

$$W = 1 + I \cdot W_1\,.$$

Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke W.

3. Zvezna slučajna spremenljivka X naj ima vrednosti na intervalu $[a,b]$. Naj bo $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ particija intervala $[a,b]$ in privzemite, da je porazdelitvena funkcija F_X zvezna in je na vsakem intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ linearna. Definirajte funkcijo $f\colon [a,b] \to [0,1]$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} & \text{za } x_k \leq x < x_{k+1} \text{ in } k = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1 & \text{za } x = b \end{cases}$$

Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke $U = f(X)$?

4. Naj bodo slučajne spremenljivke Z_1, Z_2, U neodvisne in velja $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$, U pa ima vrednosti na $(0,1)$ ter gostoto $f_U(u)$. Kakšna je porazdelitev spremenljivke
$$W = \sqrt{U} Z_1 + \sqrt{1-U} Z_2\,?$$
Namig: primerno pogojujte.

5. Kot znano privzemite, da za neodvisni in enako porazdeljeni X in Y porazdelitev vsote $X+Y$ enolično določa porazdelitev X. Naj bosta X, Y neodvisni in enako porazdeljeni, vsota $X+Y$ pa naj ima enako porazdelitev kot razlika $U-V$, kjer sta U, V neodvisni in $U, V \sim \Gamma(2,1)$. Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X.

6. Naj bo X nenegativna diskretna slučajna spremenljivka s končno mnogo vrednostmi. Utemeljite, da je
$$\int_0^\infty P(X \geq x)dx = E(X)\,.$$

7. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki. Predpostavite, da sta slučajni spremenljivki X in $Y - aX$ neodvisni za neki a. Pokažite, da je
$$E(Y|X = x_k) = E(Y) - aE(X) + ax_k$$

za vsako možno vrednost x_k slučajne spremenljivke X.

8. Naj bodo $U_1, U_2, \ldots, U_N$ neodvisne in enakomerno porazdeljene na $(0,1)$. Definirajte

$$I_{kl} = \begin{cases} 1\,, & \text{če je } U_k > U_l \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za vse možne pare (k,l) in (m,n) izračunajte

$$\operatorname{cov}(I_{kl}, I_{mn}) \ .$$

9. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ enako porazdeljene, neodvisne celoštevilske slučajne spremenljivke. Označite $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pokažite, da za $i \neq j$ velja

$$\begin{aligned} E\left(X_i X_j | S_n = k\right) &- E\left(X_i | S_n = k\right) E\left(X_j | S_n = k\right) \\ &= -\frac{1}{n-1}\left(E\left(X_1^2 | S_n = k\right) - E\left(X_1 | S_n = k\right)^2\right) \ . \end{aligned}$$

Namig: ali so vse pogojne pričakovane vrednosti $E(S_n X_i | S_n = k)$ enake? Kaj pa $E(X_i X_j | S_n = k)$?

10. Naj bodo slučajne spremenljivke W, W_1, W_2, I_1 in I_2 neodvisne, nenegativne in celoštevilske. Privzemimo, da imajo W, W_1 in W_2 enako porazdelitev. Naj bo $I_1, I_2 \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ in naj velja

$$W = 2 + I_1 \cdot W_1 + I_2 \cdot W_2 \,.$$

Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke W.