Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

24. junij 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bosta A in B dogodka ter $\epsilon > 0$. Predpostavite, da lahko najdemo dogodka A_ϵ in B_ϵ, za katera je

$$P\big((A \cap A_\epsilon^c) \cup (A^c \cap A_\epsilon)\big) < \epsilon \quad \text{in} \quad P\big((B \cap B_\epsilon^c) \cup (B^c \cap B_\epsilon)\big) < \epsilon\,.$$

Ocenite

$$P(A \cap B) - P(A \cap B \cap A_\epsilon \cap B_\epsilon)$$

in

$$P(A_\epsilon \cap B_\epsilon) - P(A \cap B \cap A_\epsilon \cap B_\epsilon)\,.$$

Nadalje pokažite, da velja

$$\big|P(A \cap B) - P(A_\epsilon \cap B_\epsilon)\big| < 2\epsilon\,.$$

2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ in naj za nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko X velja

$$P(X = k) = \left(-a + \frac{(n+1)a}{k}\right) P(X = k-1)$$

za $k = 1, 2, \ldots$ Najdite porazdelitev te slučajne spremenljivke in jo poimenujte.

3. Naj za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y s končno zalogo vrednosti velja

$$P(X = k, Y \in \{l, l+1\}) = P(X = k)\, P(Y \in \{l, l+1\})$$

za vse $k, l \in \mathbb{Z}$. Za fiksen l izračunajte

$$\sum_{i=l}^{\infty} (-1)^{i-l} P(X = k, Y \in \{i, i+1\})$$

in

$$\sum_{i=l}^{\infty} (-1)^{i-l} P(Y \in \{i, i+1\})\,.$$

Sta X in Y neodvisni?

4. Slučajni spremenljivki X in Y naj imata skupno gostoto

$$f_{X,Y}(x, y) = h(|x| + |y|)$$

za neko zvezno funkcijo $h\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$. Utemeljite, da je gostota slučajne spremenljivke $Z = |X| + |Y|$ enaka

$$f_Z(z) = 4z\, h(z)$$

za $z > 0$.

5. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno gostoto oblike $f_{X,Y}(x, y) = h(x^2 + y^2)$. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažite, da je slučajna spremenljivka $aX + bY$ porazdeljena enako kot kX za neko konstanto k, ki jo izrazite z a in b.

   Namig: najprej hkrati glejte še slučajno spremenljivko $aY - bX$.

6. Naj bosta X in Y omejeni celoštevilski slučajni spremenljivki in $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ omejena nepadajoča funkcija. Naj za vsak $k \in \mathbb{Z}$ velja

$$P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)\,.$$

   Utemeljite, da je

$$E\left[f(X)\right] \leq E\left[f(Y)\right]\,.$$

   Namig: primerjajte ustrezni vsoti

$$\sum_k a_k(b_k - b_{k+1}) \qquad \textit{in} \qquad \sum_k b_k(a_k - a_{k-1})\,.$$

7. Privzemite, da za diskretni slučajni spremenljivki X in Y velja $E(X) = 0$ in $E(|Y|) < \infty$. Naj za neki $b \neq 1$ velja

$$E(Y \mid X = x) = ax + b\,E(Y)$$

za vsako možno vrednost x slučajne spremenljivke X. Izračunajte $E(Y)$.

8. Naj bodo U_1, U_2 in U_3 neodvisne in enakomerno porazdeljene na $(0,1)$. Za $k, l \in \{1,2,3\}$ definiramo

$$I_{kl} = \begin{cases} 1\,, & \text{če je } U_k > U_l \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte

$$\operatorname{cov}(I_{12}, I_{13})\,.$$

9. Naj bodo X, Y, Z nenegativne celoštevilske z $E(Y) < \infty$, $E(Z) < \infty$ in $E(YZ) < \infty$. Predpostavite, da za neka števila a, b, c, d velja

$$P(Y = k, Z = l \mid X = m) = P(Y = k \mid X = m)\, P(Z = l \mid X = m)$$

ter

$$E(Y \mid X = m) = am + b \qquad \text{in} \qquad E(Z \mid X = m) = cm + d$$

za vse možne m. Pokažite, da velja

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = ac \operatorname{var}(X)\,.$$

10. Naj za nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ velja

$$P(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

za neki $p \in (0, 1)$. Pri tem je $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$. Poiščite rodovno funkcijo in porazdelitev slučajne spremenljivke X.