

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

17. APRIL 2026

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravih odgovorov.

| Naloga | Točke |
|--------|-------|
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | |
| 8. | |
| 9. | |
| 10. | |
| Skupaj | |

1. Pokažite, da je $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$, če in samo če je $P(A|B \cap C) = P(A|C)$.

2. Naj bo $U \sim U(0, 1)$ in $\alpha > 0$. Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke

$$X = (-\log U)^\alpha .$$

3. Naj za indikatorja I in J velja $P(I = 1, J = 1) = P(I = 1)P(J = 1)$. Ali to implicira, da sta I in J neodvisna?

4. Naj bodo X, Y in Z neodvisne in $X, Y, Z \sim \exp(1)$. Slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X + Y + Z} \quad \text{in} \quad V = \frac{Y}{Y + Z}$$

sta neodvisni. Utemeljite, zakaj.

5. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z $X \sim \exp(\lambda)$ ter naj bo Y zvezna z gostoto $f_Y(y)$ in $Y \geq 0$. Pokažite, da je

$$P(X > Y) = E(e^{-\lambda Y}) .$$

6. Naj bosta slučajni spremenljivki U in V neodvisni z $U \sim U(0, 1)$ in $V \sim \Gamma(2, 1)$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke $X = UV$.

7. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki in predpostavite, da sta slučajni spremenljivki X in $Y - aX$ neodvisni za neki a . Pokažite, da je

$$E(Y|X = x) = E(Y) - aE(X) + ax$$

za vsako možno vrednost x slučajne spremenljivke X .

8. Naj bodo U , V in W neodvisne in enakomerno porazdeljene na $(0, 1)$. Definirajte

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{če je } U < V \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

in

$$I_2 = \begin{cases} 1 & \text{če je } V < W \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte $\text{var}(I_1 + I_2)$.

9. Naj bodo X, Y, Z nenegativne celoštevilske z $E(Y) < \infty$, $E(Z) < \infty$ in $E(YZ) < \infty$. Predpostavite, da za neka števila a, b, c, d velja

$$P(Y = k, Z = l | X = m) = P(Y = k | X = m)P(Z = l | X = m)$$

ter

$$E(Y | X = m) = am + b \quad \text{in} \quad E(Z | X = m) = cm + d$$

za vse možne m . Pokažite, da velja

$$\text{cov}(Y, Z) = ac \text{var}(X).$$

10. Naj bodo I_1, I_2, \dots neodvisni indikatorji z $I_k \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{k})$ za $k = 1, 2, \dots$. Naj bo N od njih neodvisna celoštevilska slučajna spremenljivka s $P(N = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$ za $n = 0, 1, 2, \dots$. Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

Namig: za $|x| < 1$ in $a > 0$ je

$$(1 - x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n,$$

kjer je $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ Pochhammerjev simbol.

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO - PEDAGOŠKA MATEMATIKA

VERJETNOST
TEORETIČNI IZPIT
17. APRIL 2026

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravih odgovorov.

| Naloga | Točke |
|--------|-------|
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | |
| 8. | |
| 9. | |
| 10. | |
| Skupaj | |

1. Pokažite, da je $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$, če in samo če je $P(A|B \cap C) = P(A|C)$.

2. Naj bo $U \sim U(0, 1)$ in $\alpha > 0$. Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke

$$X = (-\log U)^\alpha .$$

3. Naj za indikatorja I in J velja $P(I = 1, J = 1) = P(I = 1)P(J = 1)$. Ali to implicira, da sta I in J neodvisna?

4. Naj bodo X, Y in Z neodvisne in $X, Y, Z \sim \exp(1)$. Slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X + Y + Z} \quad \text{in} \quad V = \frac{Y}{Y + Z}$$

sta neodvisni. Utemeljite, zakaj.

5. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z $X \sim \exp(\lambda)$ ter naj bo Y zvezna z gostoto $f_Y(y)$ in $Y \geq 0$. Pokažite, da je

$$P(X > Y) = E(e^{-\lambda Y}) .$$

6. Naj bosta slučajni spremenljivki U in V neodvisni z $U \sim U(0, 1)$ in $V \sim \Gamma(2, 1)$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke $X = UV$.

7. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki in predpostavite, da sta slučajni spremenljivki X in $Y - aX$ neodvisni za neki a . Pokažite, da je

$$E(Y|X = x) = E(Y) - aE(X) + ax$$

za vsako možno vrednost x slučajne spremenljivke X .

8. Naj bodo Z_1, Z_2, \dots, Z_n neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Izračunajte

$$\text{var} \left(\sum_{i,j=1}^n Z_i Z_j \right).$$

Kot znano lahko privzamete, da je $E(Z_1^4) = 3$.

9. Naj bodo X, Y, Z nenegativne celoštevilske z $E(Y) < \infty$, $E(Z) < \infty$ in $E(YZ) < \infty$. Predpostavite, da za neka števila a, b, c, d velja

$$P(Y = k, Z = l | X = m) = P(Y = k | X = m)P(Z = l | X = m)$$

ter

$$E(Y | X = m) = am + b \quad \text{in} \quad E(Z | X = m) = cm + d$$

za vse možne m . Pokažite, da velja

$$\text{cov}(Y, Z) = ac \text{var}(X).$$

10. Naj za nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in $N \sim \text{Po}(\lambda)$ velja

$$P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

za neki $p \in (0, 1)$. Pri tem je $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$. Poiščite rodovno funkcijo in porazdelitev slučajne spremenljivke X .

