Ime in priimek: ______________________ Vpsna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

17. marec 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženemu navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Privzemite, da je vsak dogodek iz družine $\{A, B, A \cap B\}$ neodvisen od vsakega dogodka iz družine $\{C, D, C \cap D\}$. Pokažite, da sta dogodka $A \cup B$ in $C \cup D$ neodvisna.

2. Za zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naj velja, da imajo zvezne omejene gostote in je $X_1 \sim U(0,1)$ ter

$$f_{X_{k+1}}(x) = \int_0^1 f_{X_k}(x-u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Izračunajte $E(X_k)$.

3. Naj bodo $I_1, I_2, \ldots, I_n$ indikatorji s porazdelitvijo

$$P(I_1 = i_1, I_2 = i_2, \ldots, I_n = i_n) = \frac{s! \cdot (n-s)!}{(n+1)!}$$

za $i_k \in \{0,1\}$ in $s = \sum_{k=1}^{n} i_k$. Kakšna je porazdelitev para (I_1, I_2)?

4. Naj bodo X, Y in Z neodvisne eksponentne $\exp(1)$ slučajne spremenljivke. Pokažite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X+Y} \qquad \text{in} \qquad V = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

neodvisni.

5. Naj bodo $I_1, I_2, \ldots, I_n$ indikatorji s porazdelitvijo

$$P\left(I_1 = i_1, I_2 = i_2, \ldots, I_n = i_n\right) = \frac{s! \cdot (n-s)!}{(n+1)!}$$

za $i_k \in \{0,1\}$ in $s = \sum_{k=1}^{n} i_k$. Izračunajte $E(I_1)$.

6. Za pozitivni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj velja

$$E(Y \mid X = l) = \begin{cases} 2\,, & \text{če je } l > 2; \\ l + E(Y)\,, & \text{za } l \leq 2; \end{cases}$$

Naj bo $X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$. Izračunajte $E(Y)$.

7. Naj bodo $X_0, X_1, \ldots, X_n$ take slučajne spremenljivke, da je za $0 \leq k \leq n-1$ slučajna spremenljivka $X_{k+1} - X_k$ neodvisna od $X_0, X_1, \ldots, X_k$. Privzemite, da je $E(X_k) = 0$ in $\mathrm{var}(X_k) = a$ za vse k ter $\mathrm{var}(X_{k+1} - X_k) = b$ za $0 \leq k \leq n-1$. Naj bo

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \left(X_{k+1} - X_k\right) .$$

Izračunajte $\mathrm{var}(Y)$.

8. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, nenegativne, enako porazdeljene celoštevilske slučajne spremenljivke. Označite $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Utemeljite, da je

$$\frac{k}{n} = E(X_1 | S_n = k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{jP(X_1 = j)P(S_{n-1} = k - j)}{P(S_n = k)} .$$

9. Za diskretne slučajne spremenljivke X, Y, Z s končnim naborom vrednosti naj bo

$$\operatorname{cov}(Y, Z \mid X = x) = 0$$

za vse možne vrednosti x slučajne spremenljivke X. Pokažite, da je

$$\sum_x E(Y \mid X = x) \cdot E(Z \mid X = x) \cdot P(X = x) = E(XY) \,.$$

10. Naj bo G_X rodovna funkcija nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke X. Utemeljite, da je za $0 < \alpha, \beta < 1$ funkcija

$$H(s) = 1 - \alpha \left(1 - G_X(s)\right)^{\beta}$$

rodovna funkcija nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke.