Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

14. februar 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Vsak dogodek iz družine $\{A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C\}$ je neodvisen od vsakega dogodka iz družine $\{D, F, D \cap F\}$. Ali sta dogodka

$$A \cap B^c \cap C \qquad \text{in} \qquad D^c \cup F^c$$

neodvisna? Utemeljite odgovor.

Rešitev:

Prva možnost*: ker je*

$$(A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap C$$

in sta dogodka v uniji disjunktna, je

$$\begin{aligned} P\big((A \cap B^c \cap C) \cap (F \cap D)\big) + P\big((A \cap B \cap C) \cap (F \cap D)\big) \\ = P\big((A \cap C) \cap (F \cap D)\big) \,. \end{aligned}$$

Iz predpostavk sledi

$$\begin{aligned} &P\big((A \cap B^c \cap C) \cap (F \cap D)\big) \\ &\quad = P\big((A \cap C) \cap (F \cap D)\big) - P\big((A \cap B \cap C) \cap (F \cap D)\big) \\ &\quad = P(A \cap C)\, P(F \cap D) - P(A \cap B \cap C)\, P(F \cap D) \\ &\quad = \big(P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\big)\, P(F \cap C) \\ &\quad = P(A \cap B^c \cap C)\, P(F \cap D)\,. \end{aligned}$$

Dogodka $A \cap B^c \cap C$ in $F \cap D$ sta torej neodvisna. A če sta dogodka A_1, A_2 neodvisna, sta neodvisna tudi A_1, A_2^c. Komplement dogodka $F \cap D$ je $F^c \cup D^c$, kar potrjuje, da sta neodvisna tudi zahtevana dogodka.

Druga možnost: *obe družini sta π-sistema. Po izreku s predavanj so neodvisni vsi dogodki, ki jih lahko iz dogodkov ene ali druge družine sestavimo z unijami, preseki in komplementiranjem.*

2. Naj bo $X \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B, N)$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = B - X$.

   Rešitev: iz posode z $B + R = N$ kroglicami naključno izberemo n kroglic. Število belih med izbranimi je $X \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B, N)$. Kroglice, ki ostanejo v posodi, so prav tako naključno izbran vzorec velikosti $N - n$ izmed vseh kroglic, Y pa šteje število belih kroglic v tem vzorcu. Sledi $Y \sim \mathrm{HiperGeom}(N - n, B, N)$.

3. Naj bo $U \sim U(0, 2\pi)$ in $a, b \in \mathbb{R}$ števili z $a^2 + b^2 = 1$. Najdite gostoto slučajne spremenljivke

$$X = a\cos U + b\sin U\,.$$

Namig: adicijski izrek.

Rešitev: obstaja $\alpha \in [0, 2\pi)$, za katerega je $a = \cos\alpha$ in $b = \sin\alpha$. Zapišemo lahko

$$X = \cos\alpha\cos U + \sin\alpha\sin U = \cos(U - \alpha)\,.$$

Zaradi periodičnosti kosinusa in enakomernosti porazdelitve slučajne spremenljivke na intervalu, katerega dolžina je enaka periodi, je porazdelitev X neodvisna od α. Iščemo torej porazdelitev slučajne spremenljivke $\cos U$. Za $-1 \le x \le 1$ dobimo

$$F(x) := P(\cos U \le x) = P(\arccos x \le U \le 2\pi - \arccos x) = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}$$

in opazimo še, da je $F(-1) = 0$ in $F(1) = 1$. Kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je torej zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, torej je slučajna spremenljivka X porazdeljena zvezno. Odvajanje nam da gostoto

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

za $-1 < x < 1$, sicer pa je $f_X(x) = 0$.

4. Slučajni vektor (X, Y) naj ima gostoto oblike

$$f_{X,Y}(x, y) = g(x^2 - xy + y^2)$$

za dano funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokažite, da je gostota vektorja

$$(U, V) = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X,\; Y - \tfrac{1}{2}X\right)$$

rotacijsko simetrična, in izračunajte

$$P(X > 0, Y > 0)\,.$$

Rešitev: preslikava

$$\Phi(x, y) = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x,\; y - \tfrac{1}{2}x\right)$$

je linearna z inverzom

$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\,,\; v + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)$$

in

$$J\Phi^{-1}(u, v) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Sledi

$$f_{U,V}(u, v) = g(u^2 + v^2) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\,,$$

kar pomeni, da je porazdelitev (U, V) res rotacijsko simetrična. Sledi

$$\begin{aligned}
P(X > 0, Y > 0) &= P\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,X > 0,\; Y - \tfrac{1}{2}X > -\tfrac{1}{2}X\right) \\
&= P\left(U > 0\,,\; V > -\frac{U}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \int_{u>0, v>-u/\sqrt{3}} f_{U,V}(u, v)\,du\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo dejstvo, da je integral rotacijsko simetrične funkcije po območju, ki ga omejujeta poltraka iz izhodišča, sorazmeren kotu, ki ga oklepata ta poltraka.

5. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne z $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Najdite verjetnost

$$P\big(X_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)\,.$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned}
&P\big(X_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big)\\
&\qquad = P\left(X_1 \leq X_2, \ldots, X_1 \leq X_n\right)\\
&\qquad = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} dx_1 \int_{x_1 \leq x_2, \ldots x_1 \leq x_n} \prod_{i=2}^n \lambda_i e^{-\lambda_1 x_i} dx_2 \ldots dx_n\\
&\qquad = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} dx_1 e^{-(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) x_1}\\
&\qquad = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\,.
\end{aligned}$$

6. Dan naj bo r-dimenzionalen slučajni vektor $\mathbf{X} \sim \mathrm{Multinom}(n, \mathbf{p})$. Izračunajte

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_r)\,.$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned}
&E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_r)\\
&\quad = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}} k_1 \cdots k_r P(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r)\\
&\quad = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}} k_1 \cdots k_r \cdot \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}\\
&\quad = \sum_{\substack{k_1>0,k_2>0,\ldots,k_r>0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}} k_1 \cdots k_r \cdot \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}\, p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}\\
&\quad = n(n-1)\cdots(n-r+1)p_1 \cdots p_r \times\\
&\qquad\qquad \sum_{\substack{k_1>0,k_2>0,\ldots,k_r>0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}} \frac{(n-r)!}{(k_1-1)! \cdots (k_r-1)!}\, p_1^{k_1-1} \cdots p_r^{k_r-1}\\
&\quad = n(n-1)\cdots(n-r+1)p_1 \cdots p_r\,.
\end{aligned}$$

Zadnja vsota je enaka 1*, saj je to vsota vseh verjetnosti v porazdelitvi* $\mathrm{Multinom}(n-r, \mathbf{p})$.

7. Slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots, X_n$ naj imajo pričakovano vrednost 0 in varianco 1. Nadalje naj bodo slučajne spremenljivke $X_0, X_1 - \rho X_0, \ldots, X_n - \rho X_{n-1}$ neodvisne. Izračunajte $\operatorname{cov}(X_0, X_n)$.

   Rešitev: računamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_0, X_n) &= \operatorname{cov}(X_0, X_n - \rho X_{n-1} + \rho X_{n-1}) \\
&= \operatorname{cov}(X_0, X_n - \rho X_{n-1}) + \rho \operatorname{cov}(X_0, X_{n-1}) \\
&= \rho \operatorname{cov}(X_0, X_{n-1})\,.
\end{aligned}
$$

   Po indukciji je

$$
\operatorname{cov}(X_0, X_n) = \rho^n \operatorname{cov}(X_0, X_0) = \rho^n\,.
$$

8. Za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y z $E(X^2) < \infty$ in $E(Y^2) < \infty$ velja

$$P(Y = l \mid X = k) = g(l - ak)$$

za neki $a \in \mathbb{Z}$ in vsaki možni vrednosti $k, l \in \mathbb{Z}$ slučajnih spremenljivk X in Y, pri čemer je $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Izrazite $\operatorname{cov}(X, Y)$ z a in $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev: računamo za $n \in \mathbb{Z}$

$$P(Y - aX = n, X = k) = P(Y - ak = n \mid X = k)\, P(X = k)\,,$$

kar se poenostavi v

$$P(Y = n + ak \mid X = k)\, P(X = k) = g(n)\, P(X = k)\,.$$

Slučajni spremenljivki X in $Y - aX$ sta neodvisni. Sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \operatorname{cov}(X, Y - aX + aX) \\
&= \operatorname{cov}(X, Y - aX) + \operatorname{cov}(X, aX) \\
&= a \operatorname{cov}(X, X) \\
&= a \operatorname{var}(X)\,.
\end{aligned}$$

9. Naj bodo X, Y in Z diskretne s končnimi zalogami vrednosti. Privzemite, da je

$$\operatorname{cov}(Y, Z \mid X = x) = 0$$

in

$$E(Y \mid X = x) = E(Z \mid X = x) = ax$$

za neki $a \in \mathbb{R}$ in za vse možne vrednosti spremenljivke x. Izrazite $\operatorname{cov}(Y, Z)$ z a in $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev: iz predpostavk sledi, da je

$$E(YZ \mid X = x) = E(Y \mid X = x)\, E(Z \mid X = x) = a^2 x^2\,.$$

Formula za popolno pričakovano vrednost da

$$E(YZ) = a^2 E(X^2)\,.$$

Po drugi strani formula za popolno pričakovano vrednost implicira

$$E(Y) = E(Z) = a\, E(X)\,.$$

Sledi

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = a^2\big(E(X^2) - E(X)^2\big) = a^2 \operatorname{var}(X)\,.$$

10. Naj bosta $a, b \in (0,1)$ in N nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Za $s \in (-1,1)$ naj velja

$$G_N'(s)(1-as) = (a+b)\, G_N(s)\,.$$

Izračunajte $\mathrm{var}(N)$.

Rešitev: velja

$$\lim_{s \uparrow 1} G_N'(s)(1-as) = \lim_{s \uparrow 1}(a+b)G_N(s) = a+b\,.$$

Sledi

$$E(N) = \frac{a+b}{1-a}\,.$$

Za $|s| < 1$ *lahko odvajamo še enkrat in dobimo*

$$G_N''(s)(1-as) - aG_N'(s) = (a+b)G_N'(s)\,.$$

Ko gre $s \uparrow 1$*, sledi*

$$E\big(N(N-1)\big)(1-a) - \frac{a(a+b)}{1-a} = \frac{(a+b)^2}{1-a}$$

ali

$$E\big(N(N-1)\big) = \frac{a(a+b) + (a+b)^2}{(1-a)^2}\,.$$

Sledi

$$\mathrm{var}(N) = E\big(N(N-1)\big) + E(N) - \big(E(N)\big)^2\,,$$

kar se poenostavi v

$$\mathrm{var}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}\,.$$

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPSNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO - PEDAGOŠKA MATEMATIKA

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

14. FEBRUAR 2025

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

4. Slučajni vektor (X_1, X_2) naj ima na $\mathbb{R}^2$ gostoto oblike

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = h(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

kjer h funkcija ene spremenljivke. Tedaj ima za vsaki števili a, b z $a^2 + b^2 = 1$ slučajna spremenljivka $Y = aX_1 + bX_2$ enako gostoto. Utemeljite, da trditev drži.

Rešitev: definiramo preslikavo

$$(Y_1, Y_2) \overset{\Phi}{\mapsto} (aX_1 + bX_2, -bX_1 + aX_2)\ .$$

Ker je $a^2 + b^2 = 1$, je Jacobian preslikave identično 1, velja pa

$$\Phi^{-1}(y_1, y_2) = (ay_1 - by_2, by_1 + ay_2)\ .$$

Sledi, da je

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = h(y_1^2 + y_2^2)\,.$$

Zanima nas gostota Y_2, ki je robna gostota te zadnje gostote. Ta pa je neodvisna od a, b.

10. V procesu razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ naj bo

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-s}\,.$$

Navedite verjetnost, da bo proces razvejanja izumrl pred 3. generacijo.

Rešitev: iščemo verjetnost $P(Z_3 = 0)$, kar je $G_3(0)$, pri čemer vemo, da je $G_3 = G \circ G \circ G$. Z vstavljanjem dobimo

$$G_3(s) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4}} \sqrt[8]{1-s}\,.$$

Posledično je

$$P(Z_3 = 0) = \frac{1}{2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4}} = 2^{-7/4}\,.$$