Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

12. februar 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bo Ω množica vseh $(n-1)\cdot(n-1)!$ permutacij števil $\{1,2,\ldots,n\}$, za katere je $\pi(1)\neq 1$. Vsem tem permutacijam podelimo enako verjetnost. Navedite verjetnost, da naključno izbrana permutacija iz Ω nima fiksnih točk. Rezultat lahko zapišete kot vsoto, lahko uporabite tudi faktoriele.

   Rešitev: Na predavanjih smo prešteli permutacije števil od 1 *do* n*, ki nimajo fiksnih točk. Odgovor je bil*

$$n!\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

   Množica permutacij brez fiksnih točk je v celoti vsebovana v množici permutacij, za katere 1 *ni fiksna točka, zato bo preštevanje dalo enak rezultat, le pri računanju verjetnosti bomo delili z* $(n-1)\cdot(n-1)!$*. Iskana verjetnost je*

$$\frac{n}{n-1}\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

2. Naj bo $X\sim \mathrm{HiperGeom}(2m-1,2m-1,4m-2)$. Navedite največjo verjetnost $P(X=k)$.

   Rešitev: Za $0\leq k\leq 2m-1$ *je*

$$P(X=k)=\frac{\binom{2m-1}{k}\binom{2m-1}{2m-1-k}}{\binom{4m-2}{2m-1}}\,.$$

   Imenovalec je neodvisen od k*, števec pa se poenostavi v* $\binom{2m-1}{k}^2$*. Največjo vrednost dobimo ali za* $k=m-1$ *ali* $k=m$*.*

3. Naj bo X pozitivna slučajna spremenljivka z zvezno gostoto $f_X(x)$. Za pozitivno slučajno spremenljivko Y naj za vsako omejeno funkcijo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ velja

$$E\left[f(Y)\right] = E\left[X f(X)\right] .$$

Navedite gostoto slučajne spremenljivke Y in utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Za f izberimo indikatorsko funkcijo intervala $[a,b]$, $0 \le a < b$. Dobimo

$$E\left[f(Y)\right] = P(a \le Y \le b) = \int_a^b x f_X(x) dx \,.$$

Ker zgornje velja za vsak interval, je

$$f_Y(y) = y f_X(y)$$

za $y > 0$.

4. Pozitivni slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto oblike

$$f_{X,Y}(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) g(x+y)$$

za $x, y > 0$ in ustrezni funkciji f in g. Ali sta slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X+Y} \quad \text{in} \quad V = X + Y$$

neodvisni? Utemeljite odgovor.

Rešitev: Preslikava

$$(x,y) \overset{\Phi}{\mapsto} \left(\frac{x}{x+y}, x+y\right)$$

preslika $(0,\infty)^2$ bijektivno na $(0,1) \times (0,\infty)$. Velja

$$\Phi^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$$

in $J_{\Phi^{-1}}(u,v) = v$. Po transformacijski formuli sledi

$$f_{U,V}(u,v) = f\left(\frac{u}{1-u}\right) g(v) v \,.$$

Gostota je produkt funkcije odvisne samo od u in funkcije odvisne samo od v na $(0,1) \times (0,\infty)$, iz česar sledi neodvisnost.

5. Naj za nenegativni celoštevilski, neodvisni, enako porazdeljeni slučajni spremenljivki X, Y in za $k = 2, 3, \dots$ velja

$$P(X + Y = k) = (k-1)p^2 q^{k-2},$$

pri čemer je $p + q = 1$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Če sta X, Y neodvisni z $X \sim \mathrm{NegBin}(m, p)$ in $Y \sim \mathrm{NegBin}(n, p)$, je $X + Y \sim \mathrm{NegBin}(m + n, p)$. Porazdelitev v nalogi je $\mathrm{NegBin}(2, p)$, zato ustreza $X \sim \mathrm{NegBin}(1, p) = \mathrm{Geom}(p)$. To pa je tudi edina možna porazdelitev, kar sledi ali iz rodovnih funkcij ali z rekurzijo.

6. Slučajni vektor (X, Y) naj ima gostoto $f_{X,Y}(x, y)$, za katero velja

$$f_{X,Y}(x, y) > 0$$

za $x > y > 0$ in $f_{X,Y}(x, y) = 0$ sicer. Utemeljite, da X in Y ne moreta biti neodvisni.

Rešitev: Za $x > 0$ iz predpostavk sledi

$$P(X < x, Y > x) = 0.$$

Zaradi stroge pozitivnosti gostote za $x > y$ je $P(X < x) > 0$ in $P(Y > x) > 0$. Enakost $P(X < x, Y > x) = P(X < x)P(Y > x)$ ne more veljati in s tem X in Y ne moreta biti neodvisni.

7. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Izračunajte

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i,j=1}^{n} Z_i Z_j\right).$$

Kot znano lahko privzamete, da je $E(Z_1^4) = 3$.

Rešitev: Razpoznamo, da je

$$\sum_{i,j=1}^{n} Z_i Z_j = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2.$$

Vsota neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je normalno porazdeljena, pri čemer se parametri seštevajo, zato je $\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \mathrm{N}(0, n)$. *Enako porazdelitev ima slučajna spremenljivka* $\sqrt{n} Z_1$, *zato iščemo* $\operatorname{var}(n Z_1^2)$, *kar je enako* $n^2 \operatorname{var}(Z_1^2) = n^2\left[E(Z_1^4) - \left(E(Z_1^2)\right)^2\right] = 2n^2$.

Alternativno lahko uporabimo bilinearnost kovariance in zapišemo

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i,j=1}^{n} Z_i Z_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \operatorname{cov}(Z_i Z_j, Z_k Z_l).$$

Če so med indeksi i, j, k, l *(vsaj) trije različni, je* $E(Z_i Z_j Z_k Z_l) = 0$ *in vsaj ena od pričakovanih vrednosti* $E(Z_i Z_j)$ *ali* $E(Z_k Z_l)$ *enaka nič. Prav tako so kovariance tipa* $\operatorname{cov}(Z_i^2, Z_i Z_j)$ *za* $i \neq j$ *enake* 0. *Tako ostanejo le še kovariance* $\operatorname{cov}(Z_i^2, Z_i^2) = 2$, *ki jih je* n, *in kovariance* $\operatorname{cov}(Z_i Z_j, Z_i Z_j) = 1$ *za* $i \neq j$, *ki jih je* $2(n^2 - n)$. *Skupni seštevek je* $2n^2$.

8. Naj bodo X_i neodvisne z $X_i \sim \mathrm{Po}(1)$ za $i = 1, 2, 3$. Izračunajte

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2 | X_1 + X_2 + X_3 = n)\,.$$

Namig: oglejte si pogojno porazdelitev vektorja (X_1, X_2, X_3) *glede na* $X_1 + X_2 + X_3 = n$.

Rešitev: Vsote neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk so Poissonovo porazdeljene, parametri pa se seštevajo. Sledi $X := X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathrm{Po}(3)$. *Za* $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ *in* $k_1 + k_2 + k_3 = n$ *je*

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3 | X = n) = \frac{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3)}{P(X = n)}\,.$$

Upoštevanje neodvisnosti in krajšanje dasta

$$\frac{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_1 + k_2 + k_3}$$

Razpoznamo multinomsko porazdelitev s parametri n *in* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *V splošnem za komponenti* X_i, X_j *multinomske porazdelitve s parametri* n *in* $(p_1, \ldots, p_n)$ *velja* $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$. *V konkretnem primeru tukaj je*

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2 | X_1 + X_2 + X_3 = n) = -\frac{n}{9}\,.$$

9. Naj bodo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ diskretne in neodvisne s končnimi zalogami vrednosti. Predpostavite, da je $\mathrm{var}(Y_k) = 1$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Kaj je

$$\mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k | X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right)?$$

Rešitev: Pri danem pogoju lahko X_k v vsoti nadomestimo z x_k. Linearna kombinacija $\sum_{k=1}^{n} x_k Y_k$ je neodvisna od $X_1, \ldots, X_n$, zato je pogojna varianca enaka varianci, ki je $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

10. Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja z rodovno funkcijo G. Izrazite

$$E\left(s^{Z_n} | Z_{n+1} = 0\right)$$

za $n \geq 1$ in $|s| \leq 1$ s funkcijama G in rodovno funkcijo G_n spremenljivke Z_n. Pri tem je $G = G_1$.

Rešitev: Po definiciji je

$$E\left(s^{Z_n} | Z_{n+1} = 0\right) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{P\left(Z_n = k, Z_{n+1} = 0\right)}{P(Z_{n+1} = 0)}.$$

Predpostavke procesa razvejanja nam dajo

$$P\left(Z_{n+1} = 0 | Z_n = k\right) = G(0)^k,$$

ker morajo imeti vsi posamezniki v n-ti generaciji 0 potomcev, da bo $Z_{n+1} = 0$. Prepišemo

$$P(Z_n = k | Z_{n+1} = 0) = \frac{P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = k) P(Z_n = k)}{P(Z_{n+1} = 0)}.$$

Upoštevamo, da je $P(Z_{n+1} = 0) = G_{n+1}(0) = G_n(G(0))$, in dobimo

$$E\left(s^{Z_n} | Z_{n+1} = 0\right) = \frac{1}{G_n(G(0))} \sum_{k=0}^{\infty} s^k G(0)^k P(Z_n = k) = \frac{G_n(sG(0))}{G_n(G(0))}.$$