Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

11. februar 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženo navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ neodvisni. Utemeljite, da so dogodki

$$(A_1 \cap A_2)^c, (A_3 \cap A_4)^c, \ldots, (A_{2n-1} \cap A_{2n})^c$$

neodvisni.

Rešitev: za rešitev imamo več možnosti. Prva je ta, da opazimo, da so dogodki $A_1 \cap A_2, A_2 \cap A_4, \ldots, A_{2n-1} \cap A_{2n}$ *neodvisni in se skličemo na izrek s predavanj, da neodvisnost dogodkov implicira neodvisnost njihovih komplementov. Druga možnost je račun z uporabo formule za vključitve in izključitve. Naj bo* $m \leq n$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&P\left(\cap_{k=1}^m (A_{2k-1} \cap A_{2k})^c\right) \\
&\quad = 1 - P\left(\cup_{k=1}^m (A_{2k-1} \cap A_{2k})\right) \\
&\quad = 1 - \sum_{k=1}^m P(A_{2k-1} \cap A_{2k}) + \sum_{1 \leq k < l \leq m} P\left((A_{2k-1} \cap A_{2k}) \cap (A_{2l-1} \cap A_{2l})\right) - \cdots \\
&\quad = 1 - \sum_{k=1}^m P(A_{2k-1} \cap A_{2k}) + \sum_{1 \leq k < l \leq m} P(A_{2k-1} \cap A_{2k}) P(A_{2l-1} \cap A_{2l}) - \cdots \\
&\quad = \prod_{k=1}^m \left(1 - P(A_{2k-1} \cap A_{2k})\right) \\
&\quad = \prod_{k=1}^m P\left((A_{2m-1} \cap A_{2m})^c\right) .
\end{aligned}$$

Razmislek velja enako za vsako podskupino dogodkov, ne samo za prvih m. *S tem smo preverili neodvisnost po definiciji.*

2. Označite s $\chi_{(-\infty,x]}$ indikatorsko funkcijo intervala $(-\infty, x]$. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki s končnima naboroma vrednosti in naj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja
$$P(X \leq x) = E\left(Y \cdot \chi_{(-\infty,x]}(X)\right) .$$
Utemeljite, da za vsako omejeno funkcijo f velja
$$E(f(X)) = E(Yf(X)) .$$

Rešitev: naj bodo $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ možne vrednosti X in dodajmo umetno $x_0 < x_1$. Zapišemo lahko

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) 1(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left(\chi_{(-\infty,x_k]}(X) - \chi_{(-\infty,x_{k-1}]}(X)\right) .$$

Računamo z uporabo linearnosti pričakovane vrednosti

$$\begin{aligned}
E(f(X)) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left(P(X \leq x_k) - P(X \leq x_{k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left(E\left(Y \cdot \chi_{(-\infty,x_k]}(X)\right) - E\left(Y \cdot \chi_{(-\infty,x_{k-1}]}(X)\right)\right) \\
&= E\left(Y\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\chi_{(-\infty,x_k]}(X) - \chi_{(-\infty,x_{k-1}]}(X)\right)\right)\right) \\
&= E\left(Y\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) 1(X = x_k)\right)\right) \\
&= E(f(X)Y) .
\end{aligned}$$

3. Naj imata neodvisni slučajni spremenljivki X in Y gostoti f_X in f_Y ter porazdelitveni funkciji F_X in F_Y. Pojasnite, zakaj za vse $z \in \mathbb{R}$ velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) F_Y(z-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) F_X(z-u)\, du\,.$$

Rešitev: obe strani sta verjetnost $P(X+Y \le z)$. Velja namreč

$$P(X+Y \le z) = \int_{x+y \le z} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy\,.$$

Zdaj pa dvakrat uporabimo Fubinijev izrek: prvič enkrat najprej integriramo po y in dobimo prvi integral, drugič pa najprej po x in dobimo drugi integral.

4. Za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj velja

$$P\left(X=k, Y=l\right)=P(X=k)P(Y=l)$$

za vse $k \neq 0$ in vse $l \in \mathbb{Z}$. Sta X in Y nujno neodvisni?

Rešitev: za neodvisnost mora veljati $P\left(X=k, Y=l\right)=P(X=k)P(Y=l)$ za vse pare (k, l). Po predpostavkah velja enakost za vse pare, kjer je $k \neq 0$. Za manjkajoče pare računamo

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=l) &= P(Y=l)-P(X \neq 0, Y=l) \\ &= P(Y=l)-\sum_{k \neq 0} P(X=k, Y=l) \\ &= P(Y=l)-\sum_{k \neq 0} P(X=k)P(Y=l) \\ &= P(Y=l)\left(1-\sum_{k \neq 0} P(X=k)\right) \\ &= P(Y=l)P(X=0)\,. \end{aligned}$$

Neodvisnost sledi.

5. Slučajni vektor (X, Y) naj ima vrednosti v $(0, \infty)^2$ in gostoto oblike

$$f_{X,Y}(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

za funkcijo ene spremenljivke h. Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = X^2 + Y^2 \qquad \text{in} \qquad V = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

neodvisni.

Rešitev: preslikava

$$\Phi(x, y) = \big(x^2 + y^2, \operatorname{arctg}(y/x)\big)$$

na $(0, \infty)^2$ *ustreza predpostavkam transformacijske formule in preslika območje na* $(0, \infty) \times (0, \pi/2)$. *Inverzna preslikava je*

$$\Phi^{-1}(u, v) = \big(\sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v\big)$$

z Jacobijevo determinanto $J_{\Phi^{-1}}(u, v) = \frac{1}{2}$. *Gostota vektorja* (U, V) *je*

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2}h(u)\,.$$

Gostota je produkt funkcije samo spremenljivke u *na* $(0, \infty)$ *in funkcije samo spremenljivke* v *na* $(0, \pi/2)$ *(ki je konstanta). Neodvisnost sledi.*

6. Slučajne spremenljivke $U_1, U_2, V_1, V_2, Z_1, Z_2$ naj bodo neodvisne s porazdelitvami $U_1, U_2, Z_1, Z_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$ in $V_1, V_2 \sim \exp(1)$. Ali imata spremenljivki $U_1 Z_1 + U_2 Z_2$ in $V_1 - V_2$ enako porazdelitev? Utemeljite odgovor.

   Namig: velja

$$U_1 Z_1 = \tfrac{1}{4}\left((U_1+Z_1)^2 - (U_1-Z_1)^2\right) .$$

   Preverite, da sta $U_1 + Z_1$ in $U_1 - Z_1$ neodvisni.

   Rešitev: neodvisnost slučajnih spremenljivk $U_1 + Z_1$ in $U_1 - Z_1$ sledi z uporabo transformacijske formule. Po lastnostih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk sta potem

$$\frac{U_1+Z_1}{\sqrt{2}} \qquad \textit{in} \qquad \frac{U_1+Z_1}{\sqrt{2}}$$

   neodvisni standardizirano normalni. Kvadrat standardizirano normalne spremenljivke ima porazdelitev $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, zato je

$$\tfrac{1}{2}\left((U_1+Z_1)^2 - (U_1-Z_1)^2\right) = W_1 - \tilde{W}_1 ,$$

   kjer sta $W_1, \tilde{W}_1 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ in sta neodvisni. Enak razmislek velja za $U_2 Z_2$. Nazadnje lahko zapišemo

$$U_1 Z_1 + U_2 Z_2 = \frac{1}{2}\big(W_1 + W_2\big) - \frac{1}{2}\big(\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2\big) .$$

   Vsoti v oklepajih sta neodvisni in imata porazdelitev $\Gamma(1, \frac{1}{2})$. Množenje z $\frac{1}{2}$ pretvori spremenljivki v oklepajih v $\Gamma(1,1) = \exp(1)$, tako da je desna stran res razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk s porazdelitvijo $\exp(1)$.

7. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in $X_k \sim \exp(1)$ za $k \geq 1$. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Naj bosta $x < y$ fiksna. Izračunajte

$$P\left(S_n \leq x, y < S_{n+1}\right).$$

Rešitev: vemo, da je $S_n \sim \Gamma(n,1)$. Prepišemo

$$\{S_n \leq x, y < S_{n+1}\} = \{(S_n, X_{n+1}) \in A\},$$

kjer je $A = \{(s,u)\colon 0 \leq s \leq x, u > y - s\}$. Zaradi neodvisnosti je

$$f_{S_n, X_{n+1}}(s,u) = \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-s} \cdot e^{-u}$$

za $s, u \geq 0$. Integriramo

$$\begin{aligned}
\int_A f_{S_n, X_{n+1}}(s,u)\, ds\, du &= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-s} ds \cdot \int_{y-s}^{\infty} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x s^{n-1} e^{-s} \cdot e^{-(y-s)} ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} e^{-y} \int_0^x s^{n-1} ds \\
&= \frac{1}{n!} x^n e^{-y}.
\end{aligned}$$

8. Naj bo slučajna matrika $\mathbf{X}$ dana z

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{pmatrix} ,$$

kjer so $Z_1, \ldots, Z_9$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Definirajmo

$$U = \det(\mathbf{X}) \quad \text{in} \quad V = \mathrm{Sl}(\mathbf{X}) = Z_1 + Z_5 + Z_9 .$$

Izračunajte $\mathrm{cov}(U, V)$.

Rešitev: zaradi linearnosti je $E(V) = 0$, tako da je kovarianca enaka $E(UV)$. Determinanta je linearna kombinacija členov oblike $Z_i Z_j Z_k$, kjer so i, j, k različni. Pričakovana vrednost produkta $Z_1 Z_i Z_j Z_k$ pa je vedno 0, ker je vsaj en indeks različen od vseh ostalih, pri čemer uporabimo dejstvo, da je pričakovana vrednost produkta neodvisnih slučajnih spremenljivk produkt pričakovanih vrednosti. Enak razmislek velja tudi za Z_5 in Z_9. Kovarianca je tako enaka 0.

9. Naj ima vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ multinomsko porazdelitev s parametri n in $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Izračunajte $\operatorname{cov}(X_{r-1}, X_r \mid X_1 = k_1, \ldots, X_{r-2} = k_{r-2})$.

   Namig: velja

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X_{r-1}, X_r \mid X_1 = k_1, \ldots, X_{r-2} = k_{r-2}) \\
&\qquad = \operatorname{cov}(X_{r-1}, n - k_1 - \cdots - k_{r-2} - X_{r-1} \mid X_1 = k_1, \ldots, X_{r-2} = k_{r-2})\,.
\end{aligned}
$$

   Rešitev: s predavanj vemo, da je pogojna porazdelitev slučajnega vektorja (X_{r-1}, X_r) *multinomska s parametri* $n - k_1 - \cdots - k_{r-2}$ *in* $\big(p_{r-1}/(p_{r-1}+p_r), p_r/(p_{r-1}+p_r)\big)$. *Kovariance med komponentami multinomskih vektorjev pa poznamo in iz njih dobimo*

$$
\operatorname{cov}(X_{r-1}, X_r \mid X_1 = k_1, \ldots, X_{r-2} = k_{r-2}) = -(n - k_1 - \cdots - k_{r-2}) \cdot \frac{p_{r-1} p_r}{(p_{r-1} + p_r)^2}\,.
$$

10. Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\{0, 1, \ldots, m\}$ ter naj velja

$$P(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = \frac{m-k}{m} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = \frac{k}{m}$$

za $k = 0, 1, \ldots, m$. Najdite zvezo med $G_{X_{n-1}}(s)$ in $G_{X_n}(s)$. Zveza naj vsebuje odvode rodovnih funkcij. Kakšno porazdelitev mora imeti X_0, da bodo imele vse spremenljivke $X_0, X_1, \ldots$ enako porazdelitev?

Rešitev: velja

$$E\left(s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right) = s^{k+1} \cdot \frac{m-k}{m} + s^{k-1} \cdot \frac{k}{m}.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned}
G_{X_{n+1}}(s) &= E\left(s^{X_{n+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} E\left(s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right) P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(s \cdot s^k - s^2 \frac{k}{m} s^{k-1} + \frac{k}{m} s^{k-1}\right) P(X_n = k) \\
&= s G_{X_n}(s) - \frac{s^2}{m} G'_{X_n}(s) + \frac{1}{m} G'_{X_n}(s).
\end{aligned}$$

Če sta porazdelitvi X_0 in X_1 enaki z rodovno funkcijo G, velja enačba

$$(1-s)G(s) = \frac{1}{m}(1-s^2)G'(s),$$

kar se poenostavi v

$$G(s) = \frac{1}{m}(1+s)G'(s).$$

To diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama reši funkcija

$$G(s) = c(1+s)^m,$$

kjer je c konstanta. Ker je $G(1) = 1$, sledi

$$G(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^m,$$

kar je rodovna funkcija porazdelitve $\mathrm{Bin}(m, \frac{1}{2})$. *Po zgornji rekurziji imajo vse* $X_0, X_1, \ldots$ *enako porazdelitev, če je* $X_0 \sim \mathrm{Bin}(m, \frac{1}{2})$.