Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

10. februar 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženo navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ poljubni dogodki. Utemeljite, da velja

$$P\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P\left(A_k \cap A_{k-1}^c\right) .$$

Rešitev: velja

$$\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \cup_{k=2}^{\infty} \left(A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})\right) .$$

Dogodki v uniji so disjunktni, zato velja

$$P\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})\right) .$$

Opazimo, da je

$$A_k \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \subseteq A_k \cap A_{k-1}^c$$

in posledično

$$P\left(A_k \backslash (A_1 \cup \cdots A_{k-1})\right) \leq P\left(A_k \cap A_{k-1}^c\right) .$$

Neenačba sledi.

2. Naj bosta slučajni spremenljivki W_1 in I neodvisni. Naj bo $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ za določen $p \in (0,1)$, W in W_1 pa nenegativni celoštevilski z enako porazdelitvijo. Naj velja
$$W = 1 + I \cdot W_1 \,.$$
Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke W.

Rešitev: najmanjša možna vrednost W je 1, kar po predpostavki velja tudi za W_1. Zato mora biti
$$P(W = 1) = P(I = 0) = 1 - p \,.$$
Računamo
$$P(W = k + 1) = P(I = 1, W_1 = k - 1) = pP(W = k) \,.$$
Sledi $P(W = k) = p^{k-1}(1 - p)$.

3. Slučajna spremenljivka X naj ima porazdelitveno funkcijo F_X. Predpostavljamo, da je F_X zvezna in je njena zožitev na vsak interval $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, linearna funkcija. Označite z $\lfloor x \rfloor$ največje celo število, manjše ali enako $x \in \mathbb{R}$. Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

Rešitev: slučajna spremenljivka X ima gostoto, ki je na intervalu $[k, k+1)$ konstantna, recimo c_k. Za $0 \leq y < 1$ velja

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P\left(\cup_{k=-\infty}^{\infty} \{X \in [k, k+y]\}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X \in [k, k+y]) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k y \,.
\end{aligned}
$$

Porazdelitvena funkcija Y je sorazmerna y na $[0,1]$, zato je $Y \sim U(0,1)$.

4. Naj bo $(X,Y) \in (0,\infty)^2$ zvezno porazdeljen slučajni vektor in predpostavite, da velja

$$f_{X,Y}(x,y) = f\left(\frac{x}{x+y}\right) g(x+y)$$

za ustrezni funkciji f, g. Pokažite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = \frac{X}{X+Y} \qquad \text{in} \qquad V = X + Y$$

neodvisni. Lahko enolično določite njuni gostoti?

Rešitev: definiramo

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}, x+y\right) .$$

Ta preslikava preslika $(0,\infty)^2$ *bijektivno na* $(0,1) \times (0,\infty)$ *in velja*

$$\Phi^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$$

z $J_{\Phi^{-1}}(u,v) = v$. *Po transformacijski formuli je*

$$f_{U,V}(u,v) = f(u)g(v)v \,,$$

torej produkt funkcij na kartezičnem produktu $(0,1) \times (0,\infty)$, *odkoder sledi neodvisnost. Gostota* U *je večkratnik* $f(u)$, *gostota* V *pa večkratnik* $vg(v)$. *Ker se morata gostoti integrirati v* 1, *ju lahko natančno določimo.*

5. V enotski krogli v $\mathbb{R}^n$ naključno in enakomerno izberemo točko. V matematičnem jeziku ima slučajni vektor $\mathbf{X}$ gostoto

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{v_n} & \text{za } |\mathbf{x}| \leq 1; \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

kjer je v_n prostornina enotske krogle v $\mathbb{R}^n$. Poiščite eksplicitno formulo za gostoto komponente X_1 vektorja $\mathbf{X}$.

Rešitev: iskana gostota je robna gostota, torej

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2\, dx_3 \ldots\, dx_n\,.$$

Skupna gostota je na območju integracije konstanta, integriramo pa po krogli s polmerom $r = \sqrt{1-x_1^2}$ v $\mathbb{R}^{n-1}$. Prostornina krogle s polmerom r v $\mathbb{R}^{n-1}$ je enaka $v_{n-1} \cdot r^{n-1}$. Sledi, da je

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{v_{n-1}}{v_n} \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

za $-1 \leq x_1 \leq 1$. Po drugi strani je

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx \\ &= \int_0^1 (1-u)^{\frac{n-1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\, du \\ &= \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)} (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

za $-1 \leq x_1 \leq 1$.

6. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ med sabo neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Izračunajte

$$\mathrm{var}\left(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + \cdots + Z_{n-1}Z_n + Z_nZ_1\right) .$$

Rešitev: variance posameznih členov v vsoti so vse enake

$$E(Z_1^2Z_2^2) - E(Z_1Z_2)^2 = 1\,.$$

Za kovariance računamo za $k \neq l$

$$\mathrm{cov}(Z_{k-1}Z_k, Z_{l-1}Z_l) = E(Z_{k-1}Z_kZ_{l-1}Z_l) - E(Z_{k-1}Z_k)E(Z_{l-1}Z_l)\,.$$

V vseh pričakovanih vrednostih se bo eden od indeksov pojavil samo enkrat, zato so vse pričakovane vrednosti enake 0*. Sledi*

$$\mathrm{var}\left(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + \cdots + Z_{n-1}Z_n + Z_nZ_1\right) = n\,.$$

7. Naj bo $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ diskreten slučajni vektor. Predpostavite, da imajo za $i = 1, 2, \ldots, n$ vektorji $(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n, X_1, \ldots, X_{i-1})$ enako porazdelitev. Označite $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Izračunajte

$$E\left(X_1 \mid S_n = s\right) .$$

Rešitev: po predpostavki imajo za $i = 1, 2, \ldots, n$ *vektorji* (X_i, S_n) *enako porazdelitev, zato je*

$$E(X_1 \mid S_n = s) = E(X_2 \mid S_n = s) = \cdots = E(X_n | S_n = s) .$$

Po drugi strani je zaradi linearnosti

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i | S_n = s\right) = E(S_n | S_n = s) = s .$$

Sledi

$$E\left(X_1 \mid S_n = s\right) = \frac{s}{n} .$$

8. Naj bodo (X, Y, Z) polinomsko porazdeljene s parametri n in (a, b, c). Za $k = 1, 2, \ldots, n$ izračunajte
$$E(YZ \mid X = k)\,.$$

Rešitev: na dogodku $\{X = k\}$ *je* $Z = n - k - Y$, *torej je*

$$E(YZ \mid X = k) = E\left(Y(n - k - Y) \mid X = k\right)$$

in potrebujemo $E(Y \mid X = k)$ *in* $E(Y^2 \mid X = k)$. *Pogojna porazdelitev* Y *glede na dogodek* $\{X = k\}$ *je binomska s parametroma* $n - k$ *in* $b/(1 - a)$. *Sledi*

$$E(Y \mid X = k) = \frac{(n - k)b}{1 - a}$$

in

$$E(Y^2 \mid X = k) = \frac{(n - k)bc}{(1 - a)^2} + \frac{(n - k)^2 b^2}{(1 - a)^2}\,.$$

Sledi, da je

$$E(YZ \mid X = k) = \frac{(n - k)^2 b}{1 - a} - \frac{(n - k)bc}{(1 - a)^2} - \frac{(n - k)^2 b^2}{(1 - a)^2}\,.$$

Zgornje se poenostavi v

$$E(YZ \mid X = k) = \frac{(n - k)(n - k - 1)bc}{(1 - a)^2}\,.$$

9. Naj bodo $I_1, I_2, \ldots, I_n$ neodvisni indikatorji z $I_k \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$. Predpostavite, da so $J_1, J_2, \ldots, J_m$ indikatorji, za katere za vse $i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}$ in $j_1, \ldots, j_m \in \{0,1\}$ velja

$$P(J_1 = j_1, \ldots, J_m = j_m \mid I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n) = \prod_{k=1}^{m} s^{j_k} (1-s)^{1-j_k} \ ,$$

pri čemer je $s = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} i_l$ in razumemo $0^0 = 1$. Izračunajte

$$\text{var}(J_1 + \cdots + J_m) \,.$$

Rešitev: pogojna porazdelitev vsote $X = J_1 + J_2 + \cdots + J_m$ pri danih $I_1, \ldots, I_n$ je binomska s parametroma m in $s = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} i_l$. Iz pogojne porazdelitve sledi, da je

$$E\left(X \mid I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n\right) = ms$$

in

$$E\left(X^2 \mid I_1 = i_1, \ldots, I_n = i_n\right) = ms(1-s) + m^2 s^2 \,.$$

Formula za popolno pričakovano vrednost da

$$E(X) = mE\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} I_k\right) = \frac{m}{2}$$

in

$$E(X^2) = mE\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} I_k\right)\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} I_k\right)\right) + m^2 E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} I_k\right)^2\right) \,.$$

Tudi vsota $Y = \sum_{l=1}^{n} I_l$ je binomsko porazdeljena s parametroma n in $\frac{1}{2}$. Sledi

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \frac{m}{n}E(Y) - \frac{m}{n^2}E(Y^2) + \frac{m^2}{n^2}E(Y^2) \\ &= \frac{m}{2} - \frac{m}{n^2}\left(\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right) + \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right) \\ &= \frac{m}{4} - \frac{m}{4n} + \frac{m^2}{4n} + \frac{m^2}{4} \,. \end{aligned}$$

Sledi

$$\text{var}(J_1 + \cdots + J_m) = \frac{m}{4} - \frac{m}{4n} + \frac{m^2}{4n} \,.$$

10. Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z isto porazdelitvijo. Za $k \geq 1$ naj velja

$$P(X = k) = \frac{1}{4} P(X + Y = k - 1) \, .$$

Naj bo G rodovna funkcija spremenljivk X in Y. Pokažite, da je

$$G(s) - \frac{3}{4} = \frac{s}{4} G(s)^2 \, .$$

Rešitev: pomnožimo obe strani dane zveze z s^k *in seštejmo po* $k \geq 1$. *Če označimo* $P(X = 0) = p$, *velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) s^k = G_X(s) - p$$

in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} P(X + Y = k - 1) s^k = \frac{s}{4} G_{X+Y}(s) \, .$$

Ker imata X *in* Y *isto porazdelitev, velja* $G_{X+Y}(s) = G(s)^2$. *Iskana enačba je*

$$G(s) - p = \frac{s}{4} G(s)^2 \, .$$

Vstavljanje $s = 1$ *in upoštevanje, da je* $G(1) = 1$, *nam da* $p = \frac{3}{4}$.