

IME IN PRIIMEK: _____

VPIŠNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

7. JULIJ 2023

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženemu navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo A, B_1, B_2 neodvisni dogodki. Pokažite, da sta dogodka A in $B_1 \cup B_2$ neodvisna.

2. Za pozitivno celoštevilsko slučajno spremenljivko X naj velja

$$P(X = k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$$

za $k = 1, 2, \dots$. Pokažite, da sta dogodka

$$\{X \in \{2, 4, 6, \dots\}\} \quad \text{in} \quad \{X \in \{3, 6, 9, \dots\}\}$$

neodvisna.

3. Naj bosta X in Y taki celoštevilski slučajni spremenljivki, da imata X in $-X$ enaki porazdelitvi in Y ter $-Y$ enaki porazdelitvi. Privzemite, da sta $|X|$ in $|Y|$ neodvisni. Sta neodvisni tudi X in Y ? Utemeljite odgovor.

4. Naj bo X strogo pozitivna slučajna spremenljivka z gostoto $f_X(x)$. Gostota vektorja (X, Y) je

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} f_X(x) e^{-\frac{(y-x)^2}{2x}}$$

za $x > 0, y \in \mathbb{R}$ in 0 sicer. Pokažite, da sta slučajni spremenljivki X in Z , kjer je

$$Z = \frac{Y - X}{\sqrt{X}},$$

neodvisni.

5. Naj bosta U in V neodvisni z $U, V \sim U(0, 1)$. Najdite porazdelitev slučajne spremenljivke $X = \log((1 - U)(1 - V))$.

6. Predpostavite, da za slučajni spremenljivki X in Y s skupno gostoto $f_{X,Y}(x, y)$ velja, da sta X in $Y - aX$ neodvisni za določen a . Izračunajte $E(Y|X = x)$ za vse x , za katere je $f_X(x) > 0$.

7. Naj bodo X, Y in Z nenegativne celoštevilске slučajne spremenljivke in naj velja

$$P(X = i, Y = j, Z = k) = P(X = i, Y = k, Z = j)$$

za vse trojice (i, j, k) . Utemeljite, da je $E(Y | X = i) = E(Z | X = i)$ za vsak $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

8. Naj bodo X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne, nenegativne, enako porazdeljene celoštevilске slučajne spremenljivke. Označite $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Utemeljite, da je

$$\frac{k}{n} = E(X_1 | S_n = k) = \sum_{j=0}^k \frac{jP(X_1 = j)P(S_{n-1} = k - j)}{P(S_n = k)}.$$

9. Naj za slučajne spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_n velja, da so $X_1, X_2 - \rho X_1, X_3 - \rho X_2, \dots, X_n - \rho X_{n-1}$ nekorelirane, pri čemer je ρ znana konstanta. Predpostavljajte, da je $E(X_1) = 0$ in $\text{var}(X_1) = 1$. Izračunajte $\text{cov}(X_1, X_n)$.

10. Naj bosta X in Y enako porazdeljeni, nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki. Ali je lahko

$$P(X + Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$? Utemeljite odgovor.