Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

8. avgust 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo dogodki A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ in $A \cap B \cap C$ vsi neodvisni od dogodka D. Pokažite, da sta dogodka $A \cup B \cup C^c$ in D neodvisna.

2. Naj bo $X \sim \mathrm{Beta}(p, q)$. Za slučajno spremenljivko Y z vrednostmi na intervalu $(0, 1)$ naj za neko konstanto c in poljuben $y \in (0, 1)$ velja

$$P(Y \leq y) = c\, E\big[1(X \leq y) \cdot X^2\big]\,.$$

Navedite porazdelitev Y in konstanto c.

3. Naj za diskretne slučajne spremenljivke X, Y in Z velja

$$P(Z = z_m \mid X = x_k, Y = y_l) = P(Z = z_m \mid X = x_k)$$

za vsak možen par vrednosti x_k in y_l slučajnih spremenljivk X in Y in za vsako možno vrednost z_m slučajne spremenljivke Z. Pokažite, da je

$$P(Z = z_m, Y = y_l \mid X = x_k) = P(Z = z_m \mid X = x_k)\, P(Y = y_l \mid X = x_k)$$

za vse x_k, y_l in z_m.

4. Naj bo (X, Y) slučajni vektor s pozitivno gostoto $f(x, y)$. Za vsak par števil a, b z $a^2 + b^2 = 1$ naj ima vektor $(aX - bY, bX + aY)$ neodvisni enako porazdeljeni komponenti in enako gostoto kot (X, Y). Varianci X in Y naj bosta 1. Kakšna je gostota vektorja (X, Y)?

Namig: edina rešitev funkcijske enačbe

$$\psi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\psi(u) + \psi(v)\big)$$

za $u, v \geq 0$ *je linearna funkcija.*

5. Naj za nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ velja

$$P(X = k|N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

za neki $p \in (0,1)$. Pri tem je $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$. Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

6. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki in predpostavite, da sta slučajni spremenljivki X in $Y - aX$ neodvisni za neki a. Pokažite, da je

$$E(Y|X = x_k) = E(Y) - aE(X) + ax_k$$

za vsako možno vrednost x_k slučajne spremenljivke X.

7. Naj bodo $X_0, X_1, \ldots, X_n$ take slučajne spremenljivke, da je za $0 \leq k \leq n-1$ slučajna spremenljivka $X_{k+1} - X_k$ neodvisna od $X_0, X_1, \ldots, X_k$. Privzemite, da je $E(X_k) = 0$ in $\mathrm{var}(X_k) = a$ za vse k ter $\mathrm{var}(X_{k+1} - X_k) = b$ za $0 \leq k \leq n-1$. Naj bo

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \left(X_{k+1} - X_k\right) .$$

Izračunajte $\mathrm{var}(Y)$.

8. Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\{0, 1, \ldots, m\}$ ter naj velja

$$P(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = \frac{m-k}{m} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = \frac{k}{m}$$

za $k = 0, 1, \ldots, m$. Naj bo $X_0 \sim \mathrm{Bin}(m, \frac{1}{2})$. Izračunajte $\mathrm{var}(X_n)$.

9. Naj bosta X_1 in X_2 neodvisni in porazdeljeni geometrijsko $\mathrm{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$. Označimo $S = X_1 + X_2$. Za $k \geq 2$ izračunajte $\mathrm{var}(X_1 \mid S = k)$.

10. Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z rodovno funkcijo $G(s)$ in označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z G_n. Z rodovnimi funkcijami G_n izrazite verjetnost, da bo n-ta generacija zadnja neprazna.