

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

6. SEPTEMBER 2024

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bosta A in B dogodka z $0 < P(A), P(B) < 1$. Se lahko zgodi, da je $P(A|B) > P(A)$ in $P(B|A) > P(B)$?

2. Naj bodo X, Y in Z diskretne slučajne spremenljivke, za katere velja, da imajo z verjetnostjo 1 različne vrednosti, torej

$$P(X \neq Y) = P(X \neq Z) = P(Y \neq Z) = 1.$$

Omejite

$$E[1(X > Y) + 1(Y > Z) + 1(Z > X)]$$

in sklepajte, da je $\min\{P(X > Y), P(Y > Z), P(Z > X)\} \leq \frac{2}{3}$.

3. Naj bodo možne vrednosti diskretnega slučajnega vektorja (X, Y) vsi pari celih števil (k, l) . Privzemite, da velja za vsak par $(k, l) \neq (0, 0)$ enakost

$$P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l).$$

Sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

4. Naj bosta (X, Y) koordinati naključno izbrane točke na disku $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Navedite gostoto vektorja

$$(U, V) = (X^2 - Y^2, 2XY).$$

5. Slučajni vektor (X, Y) z vrednostmi v $(0, \infty)^2$ naj ima gostoto oblike

$$f_{X,Y}(x, y) = h(x + y)$$

za neko funkcijo h . Pokažite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = X + Y \quad \text{in} \quad V = \frac{X}{X + Y}$$

neodvisni.

6. Naj bodo X_1, X_2, \dots, X_{n+1} neodvisne in $X_i \sim \exp(\lambda)$. Naj bo $S_k = X_1 + \dots + X_k$ za $k = 1, 2, \dots, n + 1$. Za fiksen $x > 0$ izračunajte

$$P(S_n \leq x, S_{n+1} > x).$$

7. Naj bodo elementi matrike \mathbf{X} med sabo neodvisne, standardizirano normalno porazdeljene slučajne spremenljivke $\{X_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$. Naj bo $D = \det \mathbf{X}$. Izračunajte $\text{var}(D)$.

8. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki z vrednostmi v $\{x_1, \dots, x_m\}$ in $\{y_1, \dots, y_n\}$. Definirajte funkciji $f, g: \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$ z

$$f(x) = E(Y|X = x) \quad \text{in} \quad g(x) = E(Y^2|X = x) - [E(Y|X = x)]^2.$$

Definirajte $U = f(X)$ in $V = g(X)$. Katera znana količina je

$$E(V) + \text{var}(U)?$$

9. Naj bodo X_1, X_2, \dots, X_r neodvisne z $X_k \sim \text{Po}(1)$ za $k = 1, 2, \dots, r$. Izračunajte

$$E(X_k X_l | X_1 + \dots + X_r = n).$$

10. Predpostavite, da za zaporedje slučajnih spremenljivk X_1, X_2, \dots velja

$$E(s^{X_{n+1}} | X_n = k) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)}$$

Naj bo $X_1 \sim \text{Po}(\lambda)$. Navedite porazdelitve slučajnih spremenljivk X_2, X_3, \dots