Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Teoretični izpit

5. september 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogodki. Pokažite, da je vedno

$$P(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

in uporabite to neenakost za dokaz neenakosti

$$P\left(\cup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1\leq k<l\leq n} P(A_k \cap A_l)\,.$$

Namig: uporabite matematično indukcijo.

2. Naj za pozitivno slučajno spremenljivko X velja

$$P(X \leq x) = xP(X > x)$$

za vse $x > 0$. Pokažite, da ima X gostoto. Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke X.

3. Naj ima pozitivna slučajna spremenljivka X gostoto

$$f_X(x) = \frac{a}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^a}$$

za $x, a, \sigma > 0$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke

$$Y = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^a .$$

4. Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto, dano z

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{za } x, y > 0 \text{ in } x + y < 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Utemeljite, da imajo slučajne spremenljivke X, Y in $1 - X - Y$ enako porazdelitev.

5. Za slučajni spremenljivki X in Y naj za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$P(X \leq x, Y > y) = P(X \leq x)P(Y > y)\,.$$

Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni? Na kratko utemeljite odgovor.

6. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki z $E(X^2) < \infty$ in $E(Y^2) < \infty$. Pokažite, da je

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{x_k} x_k E(Y|X = x_k)P(X = x_k) - E(X)E(Y)\,.$$

7. Naj imata para slučajnih spremenljivk (X, Y) in (Y, X) enako porazdelitev. Utemeljite, da velja

$$E(X|X+Y=k) = \frac{k}{2}\,.$$

8. Naj bosta X in $N \geq 1$ celoštevilski slučajni spremenljivki in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ neodvisne celoštevilske enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $E(\xi_1) = 0$ in $E(\xi_1^2) = 1$. Naj bo

$$P(X = k|N = n) = P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k)\,.$$

Pokažite, da je $\mathrm{var}(X) = E(N)$.

9. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, pri čemer je $X_k \sim \mathrm{Po}(k)$. Naj bo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Izračunajte

$$E(X_k | S_n = m)$$

za $m \geq 0$.

10. Naj bosta $a, b \in (0,1)$ in N nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Za $s \in (-1,1)$ naj velja

$$G_N'(s)(1 - as) = (a+b)\, G_N(s)\,.$$

Izračunajte $\mathrm{var}(N)$.