

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

TEORETIČNI IZPIT

1. 9. 2025

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka številu pravilnih odgovorov, zaokroženo navzgor.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Za dogodke $A_1, A_2, \dots, A_n$ naj velja

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m} | B) = P(A_{i_1} | B) P(A_{i_2} | B) \dots P(A_{i_m} | B)$$

za vsak nabor indeksov $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Pokažite, da je

$$P(\cup_{k=1}^n A_k | B) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k | B)) .$$

2. Naj za slučajni spremenljivki U in V z vrednostmi na $(0, 1)$ velja

$$P(U \leq u, V \leq v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}$$

za $\theta \in (0, 1)$. Pokažite, da je $U \sim U(0, 1)$ in $V \sim U(0, 1)$ ter da slučajni spremenljivki nista neodvisni.

3. Naj za pozitivno slučajno spremenljivko X velja

$$P(X \leq x) = xP(X > x)$$

za vse $x > 0$. Pokažite, da ima X gostoto, in jo izračunajte.

4. Slučajne spremenljivke X , Y in Z naj imajo gostoto

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} g(x + y + z) & \text{za } x, y, z > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za neko nenegativno funkcijo g . Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $W = X + Y + Z$.

5. Naj bo $n \geq 2$ naravno število in $0 < p < 1$. Ali obstajata neodvisni nekonstantni slučajni spremenljivki X in Y , za kateri je $X + Y \sim \text{Bin}(n, p)$? Utemeljite vaš odgovor.
6. Naj bosta X in Y strogo pozitivni nekonstantni slučajni spremenljivki. Ali sta lahko slučajni spremenljivki $U = XY$ in $V = Y/X$ neodvisni? Utemeljite vaš odgovor.

7. Naj bodo $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ med sabo neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Izračunajte

$$\text{var} (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \dots + Z_{n-1} Z_n + Z_n Z_1) .$$

8. Naj za celoštevilске slučajne spremenljivke X, Y in Z z $E(Y) = E(Z) = 0$ velja

$$E(YZ \mid X = n) = E(Y \mid X = n) E(Z \mid X = n)$$

za vse $n \in \mathbb{Z}$. Utemeljite, da je

$$\text{cov}(Y, Z) = \sum_n E(Y \mid X = n) E(Z \mid X = n) P(X = n) .$$

9. Naj bodo X, Y, Z nenegativne celoštevilske z $E(Y) < \infty$, $E(Z) < \infty$ in $E(YZ) < \infty$. Predpostavite, da za neka števila a, b, c, d velja

$$P(Y = k, Z = l | X = m) = P(Y = k | X = m)P(Z = l | X = m)$$

ter

$$E(Y | X = m) = am + b \quad \text{in} \quad E(Z | X = m) = cm + d$$

za vse možne m . Pokažite, da velja

$$\text{cov}(Y, Z) = ac \text{ var}(X).$$

10. Za zaporedje nenegativnih celoštevilskih slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \dots$ naj velja $X_0 = 1$ in za $n = 0, 1, 2, \dots$

$$P(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = \frac{1}{1 + n} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{n}{1 + n}.$$

Izračunajte $G_n(s)$.

