Fakulteta te matematichne uchenosti

Verjetnost

Ta napisana Koronska predavanja

Na svitlobo dal tiga lejta Gospudovega 2020,
v katherem smu pod veliko preishkushno bli
Michaelus Permanus

VERJETNOST

1. Osnove verjetnostnega računa

1.1. Izidi, dogodki, verjetnosti

Primer: V 17. stoletju je bila med italijanskimi kockarji popularna stava na vsoto pik na treh kockah. Najpogostejši stavi sta bili na vsoto 9 oziroma 10. Kockarji so imeli naslednjo teorijo:

Vsota 9	Vsota 10
1 2 6	1 3 6
1 3 5	1 4 5
1 4 4	2 2 6
2 2 5	2 3 5
2 3 4	2 4 4
3 3 3	3 3 4

Glede na to, da sta spiska enako dolga, so kockarji sklepali, da sta stavi „enakovredni". Iz kockarske prakse pa so vedeli, da stavi nista enakovredni. Dilemo je razrešil Galileo Galilei (1564–1642)

Galilejeva rešitev je preprosta. Napisal je vse možnosti, kako lahko padejo tri kocke.

111	112	113	114	115	116
121	122	123	124	125	126
	⋮		⋮		⋮
661	662	663	664	665	666

S preštevanjem dobimo, da je trojic z vsoto 9 25, trojic z vsoto 10 pa 27. Vseh možnosti je $6^3 = 216$. Če privzamemo, da so vse trojice enako verjetne, je s tem razhajanje med „teorijo" in „prakso" pojasnjeno.

Moderna verjetnost vedno začne s tem, da zapišemo vse možnosti oz. definiramo množico vseh možnih izidov, ki jo označimo z Ω.

V Galilejevem primeru je

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3.$$

Primeri:

(i) Recimo, da n-krat vržemo kovanec. Na vsakem metu dobimo Š ali G. Izid je zaporedje n simbolov, ki so Š ali G. Torej je

$$\Omega = \{Š, G\}^n \quad , \quad \operatorname{card}(\Omega) = 2^n$$

(ii) Recimo, da n objektov postavimo v naključni vrstni red. Načeloma izbiramo permutacijo, kar pomeni $\Omega = S_n$; $\operatorname{card}(\Omega) = n!$

(iii) Kovanec vržemo neskončnokrat. V tem primeru bi bilo

$$\Omega = \{Š, T\}^{\mathbb{N}} \quad \text{in} \quad \operatorname{card}(\Omega) = \infty.$$

Kako pa izidom dodelimo verjetnosti?

Primer: V genetiki se pojavi primer izbire naključne permutacije. Rečemo, da je verjetnost, da izberemo 2 enaka

$\frac{\theta^k}{(\theta)_n}$, kjer je k število ciklov v permutaciji σ. Za $\theta = 1$ dobimo seveda spet znani primer, ko so vse permutacije enako verjetne.

Opomba: Izračunajte, da je $\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\theta^k}{(\theta)_n} = 1$.

Verjetnostni račun je postavil na trdno osnovo A. N. Kolmogorov (1903 - 1987). Ugotovil je, da lahko v praktično vseh primerih definiramo ustrezen prostor izidov. Tako množico je označil z Ω. V verjetnosti potem govorimo o dogodkih, ki se zgodijo ali ne zgodijo in o njihovi verjetnosti. Dogodki v matematičnem okviru postanejo podmnožice prostora izidov Ω. Definirati moramo še, kaj bomo razumeli pod verjetnostjo dogodka. To bo preprosto pravilo, ki „vsakemu" dogodku $A \subseteq \Omega$ priredi njegovo verjetnost $P(A)$. Pri tem je smiselno zahtevati, da velja:

Aksiomi Kolmogorova

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

(ii) za $A \cap B = \emptyset$ je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Pristop kmalu zaide v težave.

<u>Primer</u>: Kovanec vržemo neskončnokrat. Smiselen prostor izidov v tem primeru je $\Omega = \{G, \check{S}\}^{\mathbb{N}}$, torej vsa neskončna zaporedja grbov in številk. Recimo, da so meti „neodvisni" in je verjetnost za grb na vsakem metu enaka $P(G) = 1/2$.

Vzemimo dogodek

$$A = \underbrace{\{G\} \times \{G\} \times \quad \times \{\check{S}\} \times \{G\}}_{n\text{ metov}} \times \{G, \check{S}\} \times \{G, \check{S}\} \times \cdots$$

Kaj bi moralo reči smiselno pravilo P za $P(A)$? Odgovor bi v načelu moral biti

$$P(A) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Ali obstaja pravilo P, ki bi vsaki podmnožici $B \subseteq \Omega$ priredilo $P(B)$, tako da bi bila vrednost P na cilindričnih množicah kot je A enaka $\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$?

Odgovor je ne.

<u>Opomba</u>: Vprašanje prevedeno v teorijo mere se glasi: Ali obstaja translacijsko invariantna mera na $\mathbb{R}$, definirana na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{R})$? Če zahtevamo neko minimalno kompatibilnost take mere s topologijo na $\mathbb{R}$, je odgovor seveda ne.

Sklep je torej, da ne bo vsaka podmnožica dogodek. Na katere „dogodke" pa lahko „razširimo" pravilo P. Teorija mere postreže z odgovorom: po Carathéodorijevem izreku o razširitvi, lahko P razširimo na σ-algebro $\mathcal{F}$, ki jo generirajo vsi cilindrični dogodki oblike kot A za $n \geq 1$, tako da se na cilindričnih dogodkih P ujema z intuitivno idejo.

Iz tega in številnih drugih primerov je A. N. Kolmogorov (1903-1987) leta 1933 uvidel, da teorija mere ponuja ustrezen okvir in jezik za obravnavanje verjetnosti. Dogodki postanejo množice v neki σ-algebri $\mathcal{F}$ dogodkov, verjetnost P pa postane mera na $\mathcal{F}$.

Definicija: Naj bo Ω množica. Družino $\mathcal{F}$ podmnožic Ω imenujemo σ-algebra, če velja:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) če je $A \in \mathcal{F}$, je $A^c \in \mathcal{F}$.

(iii) če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ je $\bigcup_k A_k \in \mathcal{F}$. Unije so lahko štetne.

Po Kolmogorovu potem vsakemu dogodku A priredimo verjetnost $P(A)$, pri čemer veljajo pravila:

(i) $P(A) \in [0,1]$, $P(\Omega) = 1$.

(ii) če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjunktni, je

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

Tej lastnosti rečemo štetna aditivnost.

[illegible] σ-algebri.

Definicija: Trojico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer je Ω neka množica izidov, $\mathcal{F}$ σ-algebra dogodkov in P nenegativna mera na $\mathcal{F}$ z $P(\Omega) = 1$, bomo imenovali verjetnostni prostor.

Opombe:

(i) Nenegativni ~~meri~~ verjetnosti z $P(\Omega) = 1$ bomo pogosto rekli verjetnostna mera.

(ii) Obstajajo matematiki, ki neskončnih unij ali presekov dogodkov ne priznavajo za dogodke, vendar se je ta „končno-aditivna" veja verjetnosti izkazala za neuspešno.

Lema 1.1: Naj bodo A, A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ dogodki v verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(ii) Če je $A \subseteq B$ je $P(A) \leq P(B)$

(iii) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

(iv) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j}' P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}' P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Opomba: Tej zadnji formuli pravimo formula vključitev in izključitev.

Dokaz: (i) → (iii) prepuščamo bralcu. Za (iv) sklepamo z indukcijo. Za $n=2$ formula velja. Recimo, da velja tudi za $n-1$. Pišemo $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n$.

Računamo

$$
\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) + P(A_n) - P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + \sum_{i<j\le n-1} P(A_i \cap A_j) + \\
&\qquad \cdots + (-1)^{n-2} P(A_1 \cap \quad \cap A_{n-1}) \\
&\qquad + P(A_n) - \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) + \sum_{i<j\le n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) \\
&\qquad - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \quad \cap A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \quad \cap A_n)
\end{aligned}
$$

S tem je indukcijski korak zaključen.

<u>Primer</u>: Izberimo slučajno permutacijo iz S_n. Vsaka permutacija ima enako verjetnost, da smo jo izbrali. Kolikšna je verjetnost, da permutacija nima nobene fiksne točke?

Definirajmo $A_i = \{ i$ je fiksna točka perm. $\}$.
Zanima nas $P(A)$, kjer je A dogodek, da permutacija nima fiksnih točk.
Opazimo $A^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, torej

$$P(A^c) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \quad \cap A_n)$$

Računamo:

$P(A_i) = \frac{1}{n}$ $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ za vse i, j. $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ za vse i, j, k ... Torej je

$$P(A^c) = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} -$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n!}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} \quad , \quad \text{torej}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \quad \left(\approx \frac{1}{e}\right).$$

Lema 1.2.: Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki v verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) če je $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots\ldots$, je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

(ii) če je $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Dokaz:

(i) Definiramo $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Množice $B_1, B_2, \ldots$ so disjunktne, zato je

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) + P(A_1) \quad \text{(števna aditivnost)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) + P(A_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(A_{i+1}) - P(A_i)] + P(A_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

(ii) Gre za isto izjavo, le De Morganovi pravila je potrebno upoštevati.

Kot primer si oglejmo prvo Borel-Cantellijevo lemo.

Lema 1.3. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ poljubni dogodki z $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$. Definirajmo

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ vsebovan v neskončno mnogo } A_i\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \right)$$

Velja $P(\bar{A}) = 0$.

Dokaz: Definiramo $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$. Velja $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$, zato po lemi 1.2.

$$P(\bar{A}) = \lim_{n \to \infty} P(B_n).$$

Očitno je tudi $P(B_n) = P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$, zato zaradi konvergence vrste

$$0 \leq \limsup_{n \to \infty} P(B_n) \leq \limsup_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = 0$$

Trditev sledi.

1.2. Elementarna pogojna verjetnost in neodvisnost

Naj bo B dogodek z $P(B) > 0$. Pogojno verjetnost dogodka A glede na B definiramo z

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ohlapno to interpretiramo kot verjetnost, da se je zgodil dogodek A, če se je zgodil dogodek B.

<u>Primer</u>: V družini z dvema otrokoma so možnosti glede spola otroka enako verjetne. Možnosti so $\{MM, MŽ, ŽM, ŽŽ\}$. Naj bo $A = \{$oba otroka m. spola$\}$ in $B = \{$vsaj eden je m. spola$\}$. Kolikšna je verjetnost $P(A \mid B)$?

$$P(A \cap B) = P(\text{oba m. spola}) = 1/4$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P(\text{oba otroka ž. spola}) = 1 - 1/4 = 3/4$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

Definicija: Dogodki $H_1, H_2, H_3, \ldots$ so particija verjetnostnega prostora, če velja $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$ in $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Lema 1.4.: Naj bodo $H_1, H_2, \ldots$ particija prostora in A dogodek. Velja

$$P(A) = \sum_i P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)$$

Opomba: To je formula za popolno verjetnost.

Dokaz: Zapišemo $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i)$. Ker so dogodki v uniji disjunktni je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} \cdot P(H_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)$$

Opomba: Na tiho predpostavljamo $P(H_i) > 0$ za vse $i \geq 1$.

Lema 1.5: Za dogodke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots$$
$$\cdots P(A_n \mid A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1)$$

Dokaz: Prepuščen bralcu.

<u>Primer</u>: V posodi imamo m belih in n črnih kroglic. Naključno izbiramo kroglice dokler ne dobimo kroglice drugačne barve. Potem to kroglico vrnemo in začnemo znova. Kolikšna je verjetnost, da bo zadnja kroglica, ki jo bomo izvlekli iz posode, bela?

Oglejmo si najprej konkreten primer: $m = 2, n = 3$. Označimo s $p_{m,n}$ verjetnost, da bo zadnja kroglica bela, če je na začetku v posodi m belih in n črnih kroglic. Kaj se lahko zgodi v prvem koraku? Imamo možnosti

$H_1 = \{BB\check{C}\}$ $H_2 = \{B\check{C}\}$ $H_3 = \{\check{C}B\}$

in $H_4 = \{\check{C}\check{C}B\}$, ter $H_5 = \{\check{C}\check{C}\check{C}B\}$.

Po vrsti izračunamo za $A\{$zadnja kroglica bela$\}$

$$P(A \mid H_1) = p_{03} = 0$$

$P(A \mid H_2) = p_{13}$

$P(A \mid H_3) = p_{22} = 1/2$ (po simetriji)

$P(A \mid H_4) = p_{21}$

$P(A \mid H_5) = 1$

Računamo še (po istem nasvetu)

$$p_{21} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$ in

$$p_{13} = p_{12}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + p_{11}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 1/2$$

Izračunamo še

$P(H_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}$, $P(H_3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}$, $P(H_4) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}$,

$P(H_5) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1$.

Vstavimo in dobimo $p_{23} = 1/2$. Splošno?

Domnevajmo, da je $p_{mn} = 1/2$ za vse m, n.

Dokažemo z indukcijo. Naj bo

H_i = { izberemo i belih in črno } $i = 1, 2, \ldots, m$;

K_j = { izberemo j črnih in belo } $j = 1, 2, \ldots, n$;

Indukcija teče po številu kroglic v posodi.

Za $m + n = 2$ trditev drži.

Predpostavljajmo, da trditev drži za $m+n \leq N-1$. Naj bo $m+n = N$. Vemo:

$$P(A \mid H_m) = 0 \quad \text{in} \quad P(A \mid K_n) = 1.$$

Za $1 \leq i < m$ je $P(A \mid H_i) = p_{m-i,n} = 1/2$ in za $1 \leq j < n$ je $P(A \mid K_j) = p_{m,n-j} = 1/2$ po indukcijski predpostavki. Torej je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) + \sum_{j=1}^{n} P(A \mid K_j) \cdot P(K_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} P(H_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} P(K_j) + P(K_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - P(H_m) - P(K_n)\right) + P(K_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - P(H_m) + P(K_n)\right)$$

Izračunamo še

$$P(H_m) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{m! \cdot n!}{(m+n)!}$$

$$P(K_n) = \frac{m!\, n!}{(m+n)!}.$$ Torej je

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Primer: (Jetniški paradoks) Jetniki A, B in C so obsojeni na smrt. Vladar bo naključno izbral enega in ga pomilostil. Tukaj je razgovor med stražarjem in jetnikom A.

Jetnik A: Če mi poveš, kdo od ostalih dveh bo obešen, mi s tem ne daš nobene informacije, ker eden od njiju gotovo bo obešen.

Stražar: Če ti povem, potem ostaneta samo 2 in tvoja verjetnost preživetja je $1/2$ in ne $1/3$ kot prej.

Kdo ima prav?

Najprej, kaj pomeni „dati informacijo"? To pomeni, da je pogojna verjetnost dogodka $A = \{$jetnik A preživi$\}$ različna od verjetnosti A. Ampak v kakšnem verjetnostnem prostoru?

Predlagamo:

Usmrčena A, B | B	$1/3$
Usmrčena A, C | C	$1/3$
— " — BC | B	$1/3$ (skupaj)
— " — BC | C	

Besedilo naloge nič ne pove o tem, kako je verjetnost porazdeljena med zadnja dva izida. Recimo, da prvemu dodelimo ver. $x/3$ in drugemu $\frac{1-x}{3}$ za $x \in [0,1]$.

Računamo

$$P(A \mid \text{stražar reče } B) = \frac{P(A \cap \{\text{stražar reče } B\})}{P(\text{stražar reče } B)}$$

$$= \frac{x/3}{1/3 + x/3}$$

$$= \frac{x}{1+x} \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

$$P(A \mid \text{stražar reče } C) = \frac{1-x}{2-x} \in [0, 1/2]$$

Če torej stražar meče kovanec, torej $x = 1/2$,

je $P(A \mid \text{stražar reče } B) = 1/3 = P(A)$ in

$P(A \mid \text{stražar reče } C) = 1/3 = P(A)$.

V tem primeru stražar res ne da informacije.
V primeru pristranskega izbiranja pa seveda stražar da informacijo.

<u>Definicija</u>: (i) Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(ii) Dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ so neodvisni, če je $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$ za vse k, $1 \le k \le n$ in $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$.

(iii) Družina $\{A_i : i \in I\}$ vsebuje neodvisne dogodke, če je vsaka končna poddružina dogodkov neodvisna.

Primer:

Imamo igro na srečo z 12 ploščicami:

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{D}$ $\boxed{S}$ $\boxed{S}$ $\boxed{S}$ $\boxed{S}$.

Ploščice se obrnejo in premešajo v naključen vrstni red (slučajno permutacijo). Privzemamo, da so vsi vrstni redi enako verjetni $1/12!$. Ploščice nato obračamo od leve proti desni, dokler ne dobimo $\boxed{S}$. Izplačilo v igri je enako vsoti števil, ki smo jih dobili, če pa je med odkritimi ploščicami $\boxed{D}$, se ta vsota pomnoži z 2.

Primer: Če dobimo

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{S}$ → izplačilo 3

$\boxed{1}$ $\boxed{D}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{S}$ → -"- 12

Kolikšna je verjetnost, da bomo dobili $\boxed{D}$?

Definiramo

$H_k = \{ \boxed{S}$ se pojavi prvič kot k-ta odkrita pl. $\}$

$$P(H_k) = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdots\frac{8-k+2}{12-k+2}\cdot\frac{4}{12-k+1} = (*)$$

Preverimo: $P(H_2) = \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}$

$$P(H_3) = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}$$

$$* = 4\cdot\frac{8\cdot 7\cdots(8-k+2)\cdot(8-k+1)\cdots 1\,(12-k)\cdots}{12\cdot 11\cdots(12-k+1)\cdot(12-k)\cdots 1\cdot(8-k+1)\cdots}$$

$$= 4\cdot\frac{8!\,(12-k)!}{12!\,(8-k+1)!} \qquad k = 1, 2, \ldots, 9.$$

Označimo $A = \{$ med obrnjenimi ploščicami je $\boxed{S}$

$$P(A \mid H_k) = \frac{k-1}{8}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{9} P(A \mid H_k)\cdot P(H_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{9}\frac{(k-1)}{8}\cdot 4\cdot\frac{8!\,(12-k)!}{12!\,(8-k+1)!}$$

$$= \frac{4\cdot 8!}{12!\cdot 8}\sum_{k=1}^{9}\frac{(k-1)(12-k)!}{(8-k+1)!}$$

$$= \frac{4\cdot 7!}{12!}\cdot 4752$$

$$= 1/5$$

Primer: Naključno izberimo družino s tremi otroki. Možnosti po spolu so

$$\Omega = \{MMM, MMŽ, MŽM, ŽMM, MŽŽ, ŽMŽ, ŽŽM, ŽŽŽ\}$$

Privzemimo, da so vsi izidi enako verjetni. Definirajmo

$A = \{$vsi otroci so istega spola$\}$

$B = \{$v družini je največ en M$\}$

$C = \{$v družini sta otroka različnih spolov$\}$

Velja $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = 1/2$, $P(C) = 6/8 = 3/4$.

$$P(A \cap B) = 1/8 = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = 3/8 = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

A je neodvisen od B, B od C, A pa ni neodvisen od C.

Ohlapno spet interpretiramo, da nam dogodek B „nič ne pove" o dogodku A.

Opomba: Če v (ii) velja le $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ za $i \neq j$ rečemo, da so dogodki paroma neodvisni. To ne pomeni, da so tudi neodvisni.

Primer: $A = \{$prva karta je as$\}$ in $B = \{$prva karta je rdeča$\}$. Delimo seveda s standardnega kupa 52 dobro premešanih kart. Računamo

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52}$$

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = 1/2$$

Torej je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ kot bi pričakovali.

Primer: (Chévalier de Méré). Gledamo naslednji igri:

(i) kocko vržemo 4 krat. Zmagamo, če dobimo vsaj eno šestico.

(ii) dve kocki mečemo 24 krat. Zmagamo, če dobimo vsaj ~~dve~~ enkrat dve šestici.

Meti so med seboj neodvisni.

Računamo:

(i) $A = \{$ dobimo vsaj eno šestico $\}$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$
$$= 1 - P(\text{v vseh 4 metih dobimo nešestico})$$
$$= 1 - 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6$$
$$= 1 - (5/6)^4 = 0.5177$$

(ii) $A = \{$ dobimo vsaj eno dvojno šestico $\}$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$
$$= 1 - P(\{\text{dobimo 24 ne dvojnih šestic}\})$$
$$= 1 - \left(35/36\right)^{24} = 0.4914$$

Lema 1.6: (Druga Borel-Cantellijeva lema)
Naj bodo dogodki $A_1, A_2, \ldots$ neodvisni in naj velja $\sum_i P(A_i) = \infty$. Definirajmo

$$\bar{A} = \{\omega : \omega \text{ je v neskončno mnogo } A_i\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Velja $P(\bar{A}) = 1$.

Dokaz: Pokazali bomo, da je $P(\bar{A}^c) = 0$.

$\bar{A}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$. Dovolj je pokazati, da je

$$P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lema } 1.1.}}{=} \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) = 0.$$

Zaradi neodvisnosti je

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) &= \prod_{k=n}^{N} \big(1 - P(A_k)\big) \\ &\le \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} \qquad\qquad 1-x \le e^{-x} \text{ za } x \le 0. \\ &= e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} \end{aligned}$$

Po predpostavki $\sum_{k=n}^{N} P(A_k) \to \infty$, ko $N \to \infty$, torej je

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) = 0$$

<u>Primer</u> (Kockarjev bankrot): Igralca A in B začneta z m in n zlatniki. V vsaki rundi vržeta kovanec. Če pade grb A dobi zlatnik od B. Če pade številka B dobi zlatnik od A. Zmaga tisti, ki nasprotniku pobere vse zlatnike. Meti so med sabo neodvisni in $P(G) = p \in (0,1)$

Kaj pomeni to, da so meti neodvisni? Zadnjič smo povedali, da je ustrezen model za neskončno metov kovancev prostor $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, na katerem lahko definiramo $\mathcal{F}$ in P, ki se ujemata z našo intuicijo. Dogodki $A_i = \{$na i-tem mestu je $1\}$ so neodvisni.

Označimo s $p_{m,n}$ verjetnost, da zmaga A, če je na začetku m tlakovcev pri A in n tlakovcev pri B. Označimo

$H_1 = \{$v prvem metu pade grb$\}$

$H_2 = \{$v prvem metu pade številka$\}$

$A = \{$zmaga igralec $A\}$

Po lemi 1.4. je

$$P(A) = P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2)$$

$$= p_{m+1,n} \cdot p + p_{m-1,n+1} \cdot q$$

Označimo $N = m+n$ in $p_{m,N-m} = \pi_m$. Vemo, da je $p_{0,N} = 0$ in $p_{N,0} = 1$, torej $\pi_0 = 0$ in $\pi_N = 1$.

Iz gornje enačbe preide v

$$\pi_m = p \cdot \pi_{m+1} + q \cdot \pi_{m-1} \qquad \text{ali}$$

$$(\pi_{m+1} - \pi_m) \cdot p + (\pi_{m-1} - \pi_m) \cdot q = 0 \ . \quad \text{Sledi}$$

$$\begin{aligned} \pi_{m+1} - \pi_m &= (q/p)\,(\pi_m - \pi_{m-1}) \\ &= (q/p)^2\,(\pi_{m-1} - \pi_{m-2}) \\ &= \ldots \\ &= (q/p)^m\, \pi_1 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\pi_m = \sum_{k=1}^{m-1} (q/p)^k \cdot \pi_1 = \frac{1-(q/p)^m}{1-q/p} \cdot \pi_1$$

Iz pogoja $\pi_N = 1$ dobimo še $\pi_1 = \dfrac{1-q/p}{1-(q/p)^N}$,

torej

$$\pi_m = \frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^N} = \frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^{m+n}}$$

Tehnične opombe:

(i) za $q = p = 1/2$ moramo računati drugače in dobimo $\pi_m = \dfrac{m}{m+n}$.

(ii) Ali res vemo, da se bo igra nekoč končala? V Ω so tudi zaporedja, za katera se igra nikoli ne bo končala, recimo $\omega = (0,1,01,0,\dots)$. Označimo

$B = \{$ igra se konča $\}$. Hitro se prepričamo, da je B merljiva množica, torej dogodek in se lahko zakonito vprašamo, koj je $P(B)$. Ne bomo sicer mogli trditi, da se igra konča za vsak $\omega \in \Omega$, ampak množica B, za katero to velja, je „skoraj vse".

Označimo $B_k = \{$ med $k(m+n)$ in $(k+1)(m+n)-1$ dobimo same grbe $\}$.

Očitno je $B_k \subseteq B$ za vsak k, zato $\bigcup_k B_k \subseteq B$. Zaradi neodvisnosti metov je $P(B_k) = p^{m+n}$. Računamo

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_k B_k\right) &= 1 - P\left(\bigcap_k B_k^c\right) \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^N B_k^c\right) \\
&= 1 - \lim_{N\to\infty} (1-p^{m+n})^N \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Sledi $P(B) = 1$.

Opomba: Preverite neodvisnost B_k.

Primer (Pólyeva žara): V posodi imamo črno kroglico z maso $\theta > 0$. Dodamo kroglico barve 1. V naslednjem koraku naključno izberemo kroglico z verjetnostmi sorazmernimi z maso. Če dobimo kroglico z 1, jo vrnemo v posodo in dodamo si eno kroglico barve 1. Če dobimo črno kroglico, jo vrnemo in dodamo kroglico barve 2. Vsakič, ko izvlečemo črno kroglico, začnemo z novo barvo.

Ali bo število barv naraščalo preko vseh meja?

Definiramo $A_n = \{$po n-tem koraku ne bomo nikoli več potegnili črne kroglice$\}$.

Očitno je $\{$št. barv bo ostalo končno$\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$

Pokazati torej moramo, da je $P(A_n) = 0$ za vsak $n \geq 1$. Označimo

$A_{n,N} = \{$med koraki n in N ne potegnemo črne kroglice$\}$.

$$P(A_{n,N}) = \frac{n-1}{\theta + n - 1} \cdot \frac{n}{\theta + n} \cdots \frac{N-1}{N-1+\theta}$$

$$= \prod_{k=n-1}^{N-1} \left(1 - \frac{\theta}{\theta + k}\right)$$

$$\leq \prod_{k=n-1}^{N-1} e^{-\frac{\theta}{\theta+k}} \to 0, \text{ ko } N \to \infty.$$

Gladiatorji

Imamo dve moštvi gladiatorjev z močmi $s_1, s_2, \ldots, s_m$ in $t_1, t_2, \ldots, t_n$. V boj jih pošiljamo po vrsti. Če se spopadeta gladiatorja z močmi s in t, zmaga tisti z močjo s z verjetnostjo $\frac{s}{s+t}$, ~~tisti~~ tisti z močjo t pa z verjetnostjo $\frac{t}{s+t}$. Privzemamo, da so vsi spopadi med seboj neodvisni.

Vprašanji:

(i) Kolikšna je verjetnost, da zmaga eno ali drugo moštvo gladiatorjev?

(ii) Ali lahko z ustrezno strategijo kaj dosežemo?

Opombi:

(i) Ko gladiator zgubi, je eliminiran.

(ii) Zanemarili smo utrujanje.

Oglejmo si primer, ko je $m=2$ in $n=3$

Veljajo tudi robni pogoji

$$F_{m,1}(s_1,\dots,s_m,t_1) = 1 - \frac{t_1}{(s_1+t_1)}\cdots\frac{t_1}{(s_m+t_1)}$$

in

$$F_{1,n}(s_1;t_1,\dots,t_n) = \frac{s_1}{(s_1+t_1)}\cdots\frac{s_1}{(s_1+t_n)}$$

V načelu iz teh formul sledi $F_{m,n}(s_1,\dots,s_m;\ t_1,\dots,t_n)$, vendar ni očitno, da je rezultat simetričen v $s_1,\dots,s_m$ in $t_1,\dots,t_m$. To bomo dokazali kasneje.

Definicija: Družina dogodkov $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ je π - sistem, če je družina zaprta za preseke.

Izrek 1.6: Naj bo A neodvisen od B za vse $B \in \mathcal{P}$. Potem je A neodvisen od vseh dogodkov oblike $B_1^* \cap \quad \cap B_m^*$ z $B_k \in \mathcal{P}$ in $* \in \{1, c\}$, $k \leq m$.

Dokaz: V preseku $B_1^* \cap \quad \cap B_m^*$ lahko vse dogodke, pri katerih je $* = \cdot$ združimo v enega. Ostane dokaz, da je dogodek oblike $B_1^c \cap \quad \cap B_k^c \cap B_{k+1}$ neodvisen od A. Po pravilu za vključitve in izključitve je

$$P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^c \cap B_{k+1})$$

$$= P(A \cap B_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cap B_{k+1} \cap A)$$

$$= P(A)P(B_{k+1}) - \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap B_{k+1} \cap A)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(B_i \cap B_j \cap B_{k+1} \cap A)$$

$$- \dots$$

$$+ (-1)^k P(B_1 \cap \quad \cap B_{k+1} \cap A)$$

$$= P(A)P(B_{k+1}) - P(A)\, P(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cap B_{k+1})$$

$$= P(A) \left[P(B_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cap B_{k+1}) \right]$$

$$= P(A)\, P(B_1^c \cap \quad \cap B_k^c \cap B_{k+1})$$

Računamo je

$$P(A \cap B_1^c \cap \dots \cap B_k^c \cap B_{k+1}) + P(A \cap B_1^c \cap \dots \cap B_{k+1}^c)$$

$$= P(B_1^c \cap \dots \cap B_k^c \cap A).$$

Da je $B_1^c \cap \dots \cap B_k^c$ neodvisen od A sledi iz pravila za vključitve in izključitve. kot prej. Sledi neodvisnost A in $B_1^c \cap \dots \cap B_k^c \cap B_{k+1}^c$.

Posledica 1.6: Naj bo $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ končen π-sistem in naj bo A neodvisen o $B \in \mathcal{P}$ za vse $B \in \mathcal{P}$. Potem je A neodvisen, od vseh dogodkov, ki jih lahko sestavimo iz dogodka v $\mathcal{P}$ s končnimi preseki, komplementiranjem in unijami.

Dokaz: Vsak dogodek, ki ga lahko sestavimo na zgornji način je disjunktna unija dogodkov oblike $B_1^* \cap \dots \cap B_n^*$ z $* \in \{, c\}$. Neodvisnost sledi.

2. Slučajne spremenljivke in njihove porazdelitve

2.1. Diskretne slučajne spremenljivke

Pogosto nas ne zanimajo izidi $\omega \in \Omega$ sami po sebi, ampak neke številske vrednosti, povezane z ω.

<u>Primer</u>: Pri metanju treh kock je bil $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$. Zanimal pa nas ni sam ω, ampak vsota pik. Vsota je seveda slučajna in se spreminja od meta do meta, zato slučajna spremenljivka.

<u>Primer</u>: Naj bo $\Omega = S_n$. Permutacijo izbiramo slučajno z enakimi verjetnostmi, ki so seveda $1/n!$. Naključno izbrano permutacijo lahko damo programu Quicksort, ki bo za sortiranje porabil neko število $X(\omega)$ operacij. Ta številska vrednost je tudi lahko slučajna spremenljivka.

Z nekim izidom je lahko povezan tudi vektor, torej več števil.

Primer: Naj bo spet $\Omega = S_n$. Vsako permutacijo lahko napišemo kot produkt ciklov.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (1\,2\,3\,4)(5\,6)$$

Za $i = 1, 2, \dots, n$ definirajmo

M_i = št. ciklov dolžine i. Sestavimo vektor

$$\underline{M} = (M_1, \dots, M_6)$$

V našem primeru je

$$\underline{M}(\sigma) = (0\;1\;0\;1\;0\;0)$$

V tem primeru lahko govorimo o slučajnem vektorju.

Kaj pa formalna definicija?

Slučajne spremenljivke bomo označili s črkami s konca abecede kot $X, Y, Z, \ldots$

V Galilejevem primeru si predstavljamo, da „nevidna roka" izbere $\omega \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$, slučajno število vseh pik pa je potem odvisno od izbranega ω. Matematično nas to močno spominja na funkcijo. Po Kolmogorovu bo definicija naslednja:

Definicija: Slučajna spremenljivka X je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, taka da je $X^{-1}((a,b])$ dogodek za vsaka $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Opombi:

(i) Iz definicij izhaja, da je $X^{-1}(A)$ dogodek za vse množice A, ki jih iz polzaprtih intervalov lahko sestavimo s komplementiranjem, števnimi unijami in preseki. Takim množicam smo rekli Borelove množice.

(iii) Dogodek $X^{-1}(A)$ bomo običajno pisali kot $\{X \in A\}$, njegovo verjetnost pa kot $P(X \in A)$

Definicija: Slučajna spremenljivka X je diskretna, če je zaloga vrednosti X končna ali števna množica.

Če so $\{x_1, x_2, \dots\}$ možne vrednosti X iz definicij izhaja, da je $X^{-1}(\{x_k\})$ $\{X \in \{x_k\}\} = \{X = x_k\}$ dogodek.
Obratno izhaja, da je v primeru, ko je $\{X = x_k\}$ dogodek za vsak x_k,

$$\{X \in (a, b]\} = \bigcup_{x_k \in (a,b]} \{X = x_k\} \text{ dogodek.}$$

Za diskretne slučajne spremenljivke je dovolj zahtevati, da je $\{X = x_k\}$ dogodek za vse možne vrednosti x_k.

Vrnimo se k Galilejevemu primeru. Kockarje so zanimale verjetnosti $P(X = 9)$ in $P(X = 10)$. Vprašanje lahko postavimo za poljuben $k \in \{3, 4, \ldots, 18\}$. Dogodki $\{X = k\}$ so partija Ω, zato mora veljati

$$\sum_{x_k} P(X = x_k) = 1.$$

Celotna verjetnost 1 je torej „porazdeljena" med možne vrednosti X. To motivira:

<u>Definicija:</u> Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Verjetnosti $P(X = x_k)$ določajo porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Oglejmo si primere.

<u>Binomska porazdelitev</u>

Recimo, da mečemo kovanec n-krat. Meti so neodvisni in verjetnost za grb je enaka $p \in [0,1]$. Naj bo $X = \#$ grbov v n metih.

Formalno: $\Omega = \{G, \bar{G}\}^n$ in

$X(\omega) = \#$ grbov v $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$.

Če želimo neodvisnost metov, morajo biti dogodki $A_k = \{$dobimo a_k na k-tem metu$\}$ za $a_k \in \{G, H\}$ neodvisni. To nas sili v to, da je

$$P(\{\omega\}) = p^{\#\text{ grbov}} \cdot (1-p)^{\#\text{ števil}}.$$

Sledi za $k = 0, 1, \dots, n$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

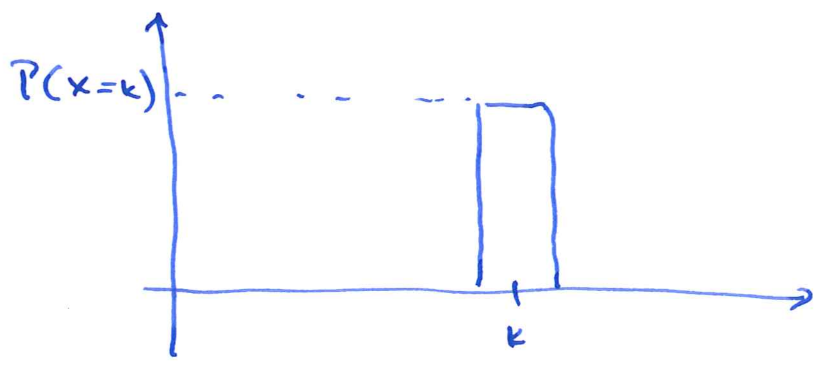
Rečemo, da ima X binomsko porazdelitev s parametroma n in p. Na kratko označimo

$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Opomba: Beseda binomska pride iz tega, da imamo pri vsakem metu kovanca dva možna izida.

V nadaljevanju bomo pisali $q = 1-p$. Kako bi si lahko binomsko porazdelitev grafično predstavili? Ideja je histogram.

Slika:



Nad k narišemo stolpec z višino $P(X=k)$

Oglejmo si kvociente

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \quad \text{za} \quad k=1,2,\ldots$$

Računamo

$$\frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-(k-1)}}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q}$$

Če želimo, da je $P(X=k) > P(X=k-1)$ mora veljati

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} > 1 \iff$$

$$(n-k+1)p > k \cdot q \iff$$

$$(n+1)p > k(p+q) = k$$

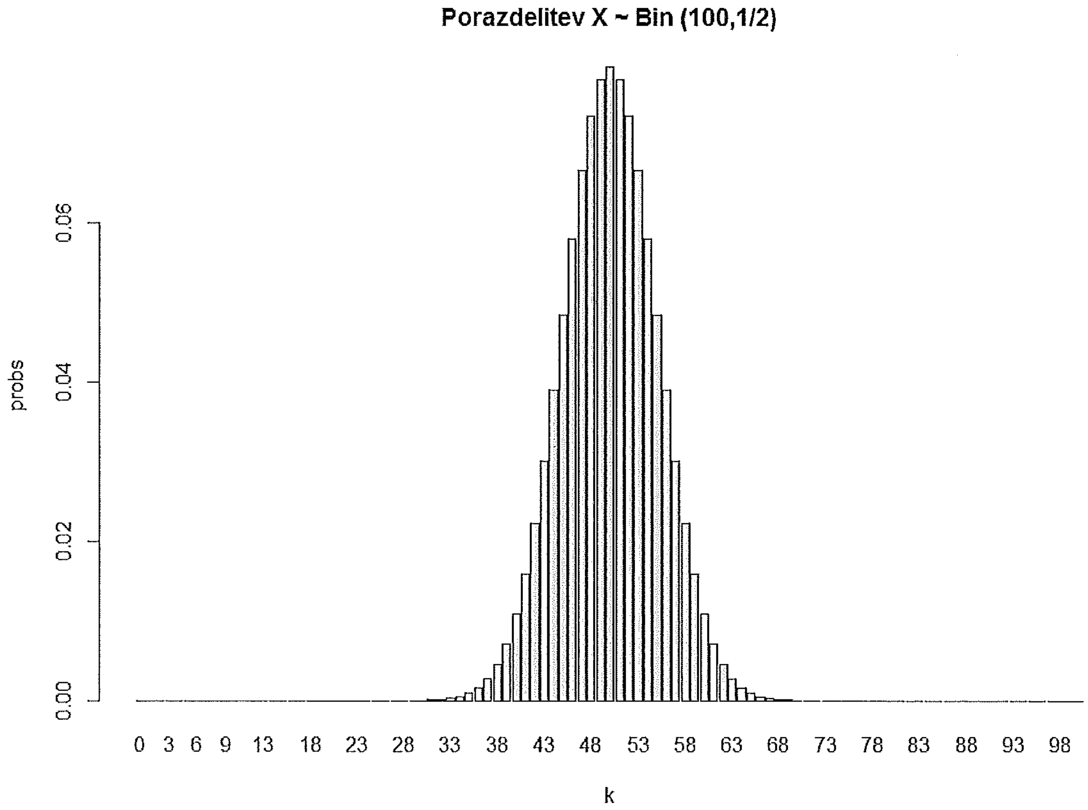
Ločimo dva primera:

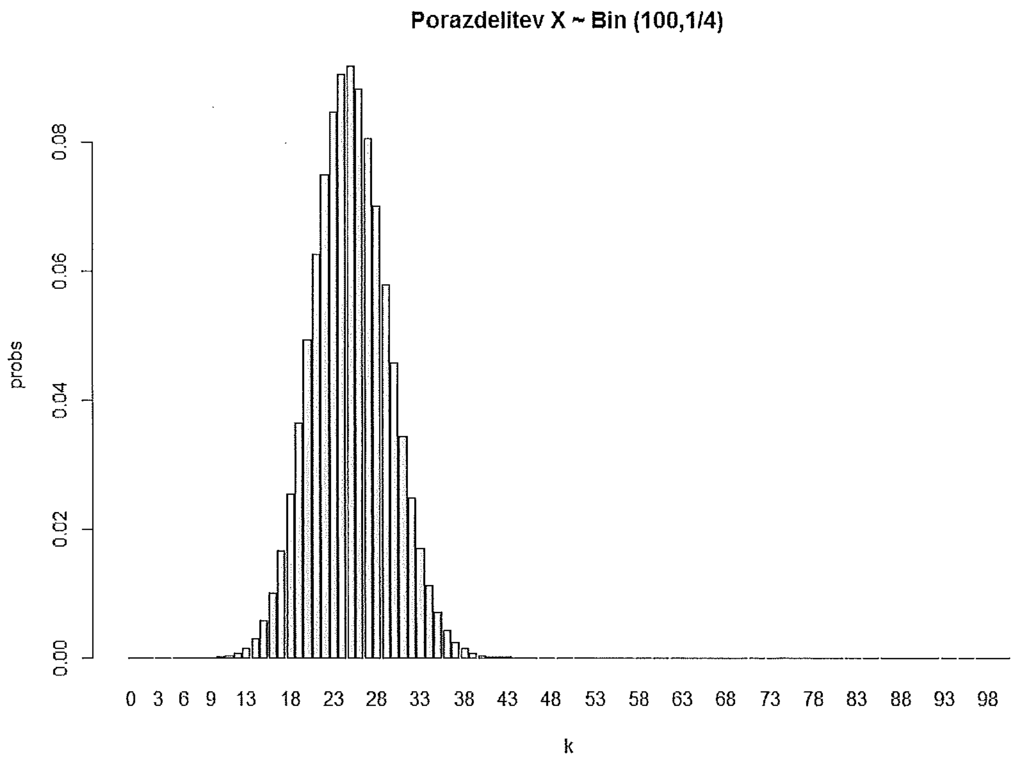
(i) Če $(n+1)p$ ni celo število, je $P(X=k) > P(X=k-1)$ za $k \leq \lfloor (n+1)p \rfloor$, sicer pa je neenakost obratna. Za $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$ dobimo najvišji stolpec.

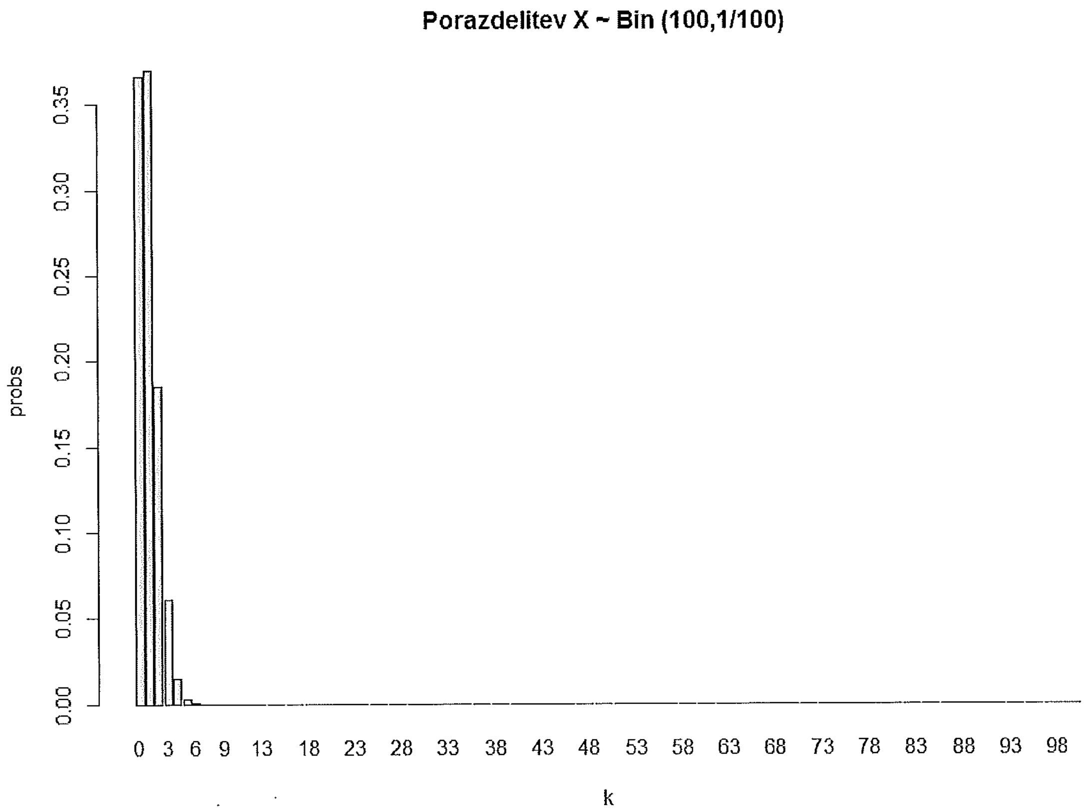
(ii) Če je $(n+1)p$ celo število, dobimo za $k=(n+1)p$ enakost $P(X=k) = P(X=k-1)$. V histogramu sta dva najvišja stolpca, levo stolpci naraščajo s k, desno pa padajo.

Opomba: Grbi in številke so metafora za štetje uspehov v n ponovitvah istega eksperimenta, v katerem imamo izida „uspeh" in „neuspeh". Nekateri učbeniki govorijo o Bernoullijevem zaporedju poskusov.

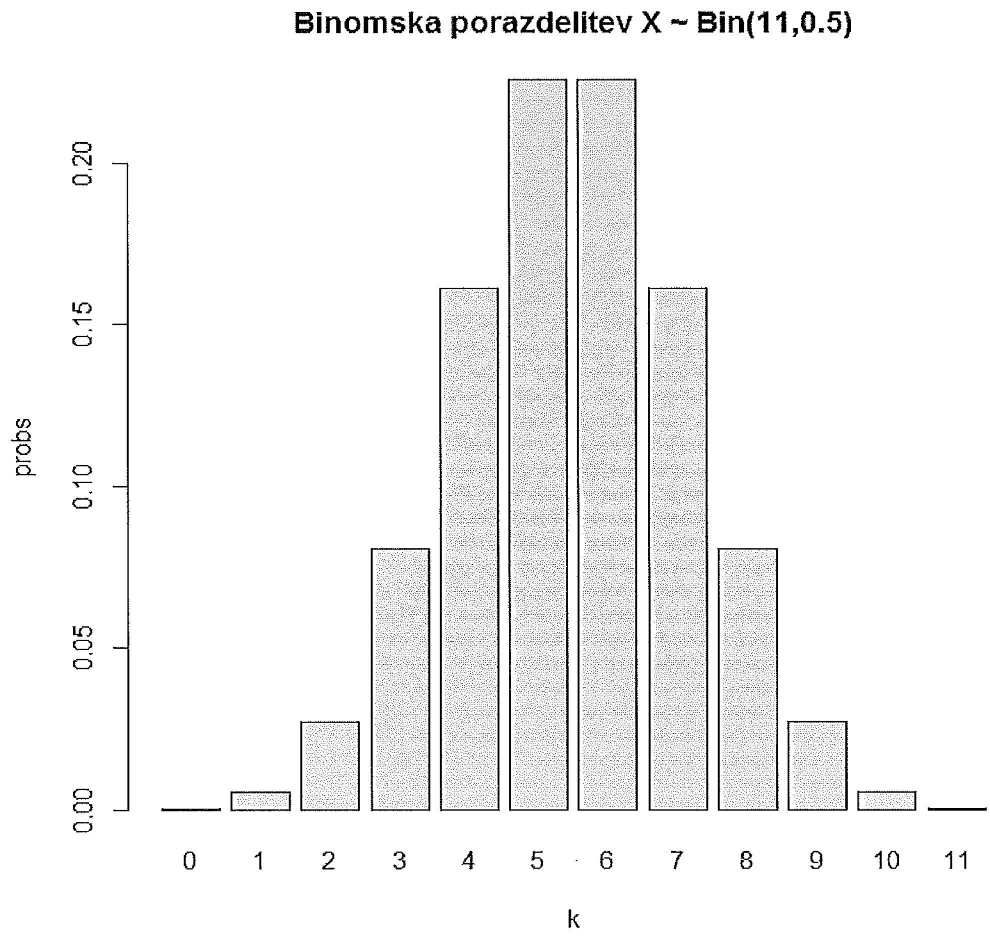
Nekaj primerov binomske porazdelitve:







Porazdelitev X ~ Bin (100,1/100)
probs
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0 3 6 9 13 18 23 28 33 38 43 48 53 58 63 68 73 78 83 88 93 98
k



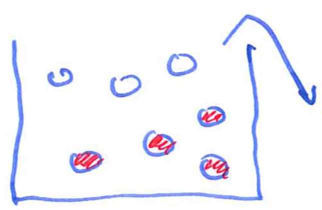
Binomska porazdelitev X ~ Bin(11,0.5)
probs
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
k

Hipergeometrijska porazdelitev

Imamo posodo, v kateri je B belih in R rdečih kroglic. Naključno izberemo $n \leq B + R$ kroglic. Bolj natančno, privzamemo, da so vsi izbori n kroglic enako verjetni. Naj bo X število belih kroglic med izbranimi. Možne vrednosti X so k, za katere je

$$\max(0, n-R) \leq k \leq \min(B, n)$$

Slika:



Izberemo n kroglic.

Izračunajmo še $P(X=k)$ za k, ki pridejo v poštev.

Vseh vzorcev je $\binom{N}{n}$, kjer smo označili $N = B + R$. Prešteti moramo še izbire n kroglic, ki vsebujejo natanko k belih in $n-k$ rdečih. Po osnovnem izreku kombinatorike je takih vzorcev $\binom{B}{k} \cdot \binom{R}{n-k}$. Sledi

$$P(X = k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Rečemo, da ima X hipergeometrijsko porazdelitev s parametri n, B in N.

Okrajšava: $X \sim \text{HiperGeom}(n, B, N)$.

Podobno kot pri binomski porazdelitvi ugotovimo, da je

$$\frac{P(X = k)}{P(X = k-1)} > 1 \iff k < \frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$$

Ločimo dva primera:

(i) če $\frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$ ni celo število,

je za $k = \left\lfloor \frac{(B+1)(n+1)}{N+2} \right\rfloor$ k-ti

stolpec najvišji, levo stolpci

padajo, desno pa tudi padajo.

(ii) če je $\frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$

celo število in $k = \frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$,

sta $(k-1)$-i in k-ti stolpec

enako visoka in največja. Proti

levi in desni potem stolpci

padajo.

<u>Primer</u>: Listek Loterije Slovenije

ima 39 števil. Od teh lahko

izberemo od 8 do 17 števil.

Vsak konec tedna je žrebanje.

Loto

KUPON D

SISTEM

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36
37	38	39

TABELA SISTEMOV

SISTEM

ŠTEVILK	8	9	10	11	12
KOMBINACIJ	8	36	120	330	792

SISTEM

ŠTEVILK	13	14	15	16	17
KOMBINACIJ	1716	3432	6435	11440	19448

Z ZNAKOM × OZNAČITE SISTEM ŠTEVILK

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

042 837471

LOTERIJA SLOVENIJE ©

PRIIMEK, IME IN NASLOV – TISKANE ČRKE

LISTEK IZPOLNITE SAMO PREKO TEGA KUPONA

Izbranih je 7 števil od 1 do 39. Izplačilo je odvisno od števila zadetkov. Predstavljamo si lahko, da žogice oštevilčene z 1 do 39 damo v posodo. Tiste, ki smo jih prekrižali na lističu pustimo bele, ostale pa pobarvamo rdeče. Ko izberemo 7 žogic, je merodajno število belih kroglic. Označimo to število z X. Če je belih kroglic 8, je

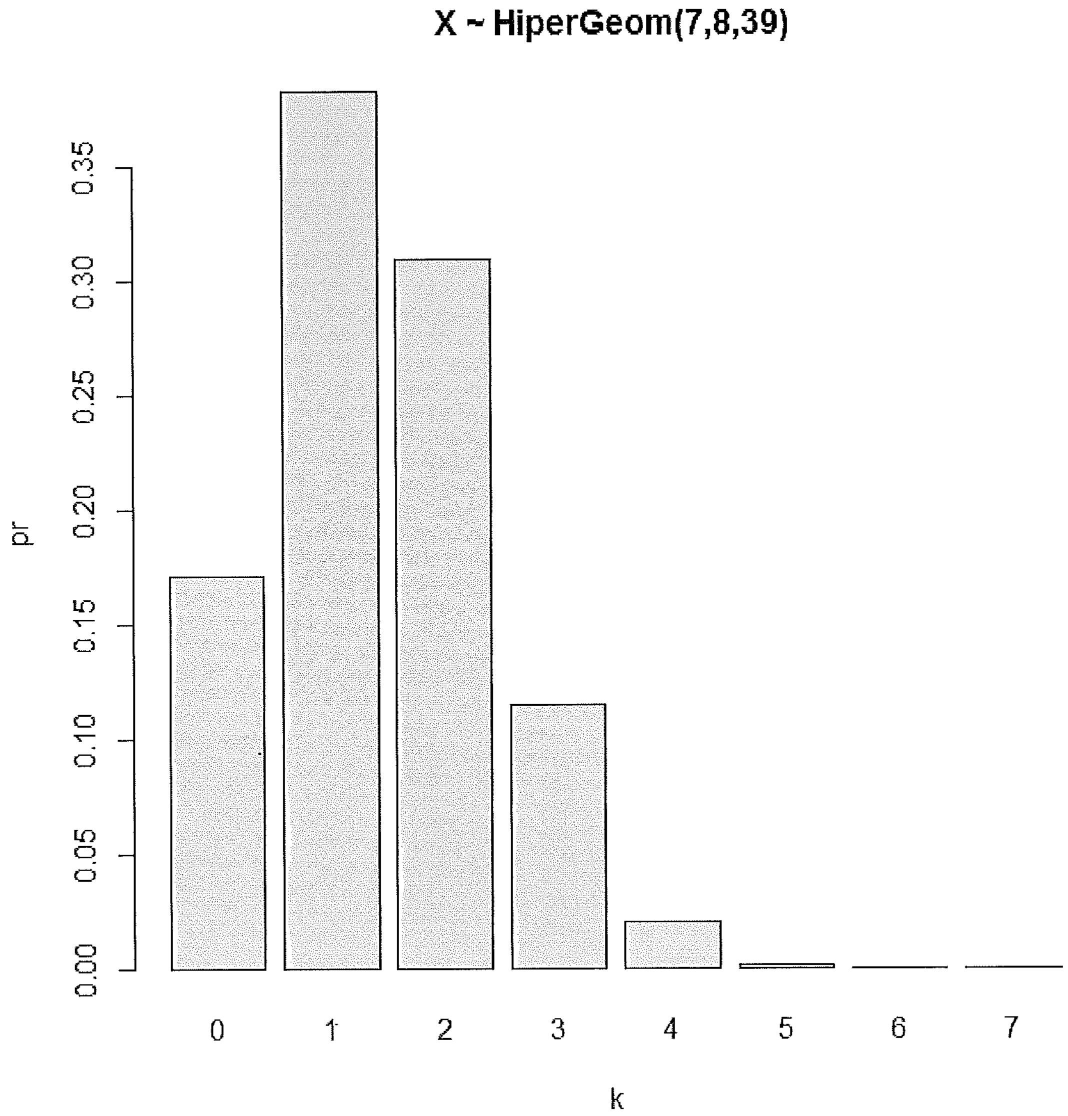
$$X \sim \text{HiperGeom}(7, 8, 39),$$

če pa na lističu izberemo m števil, pa je

$$X \sim \text{HiperGeom}(7, m, 39).$$

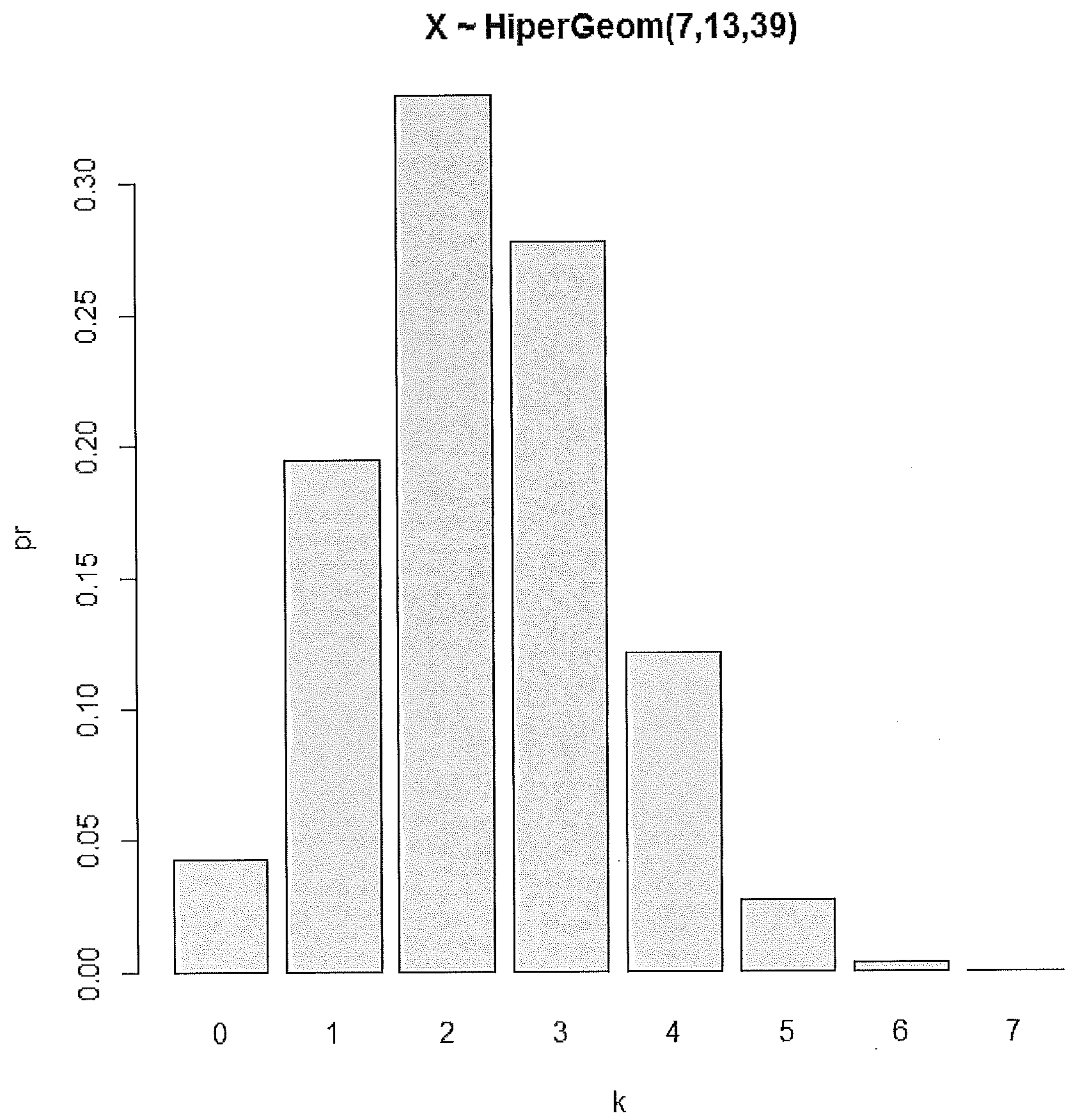
Oglejmo si nekaj histogramov.

Hipergeometrijske porazdelitve v primeru Loterije Slovenije različne *m*:



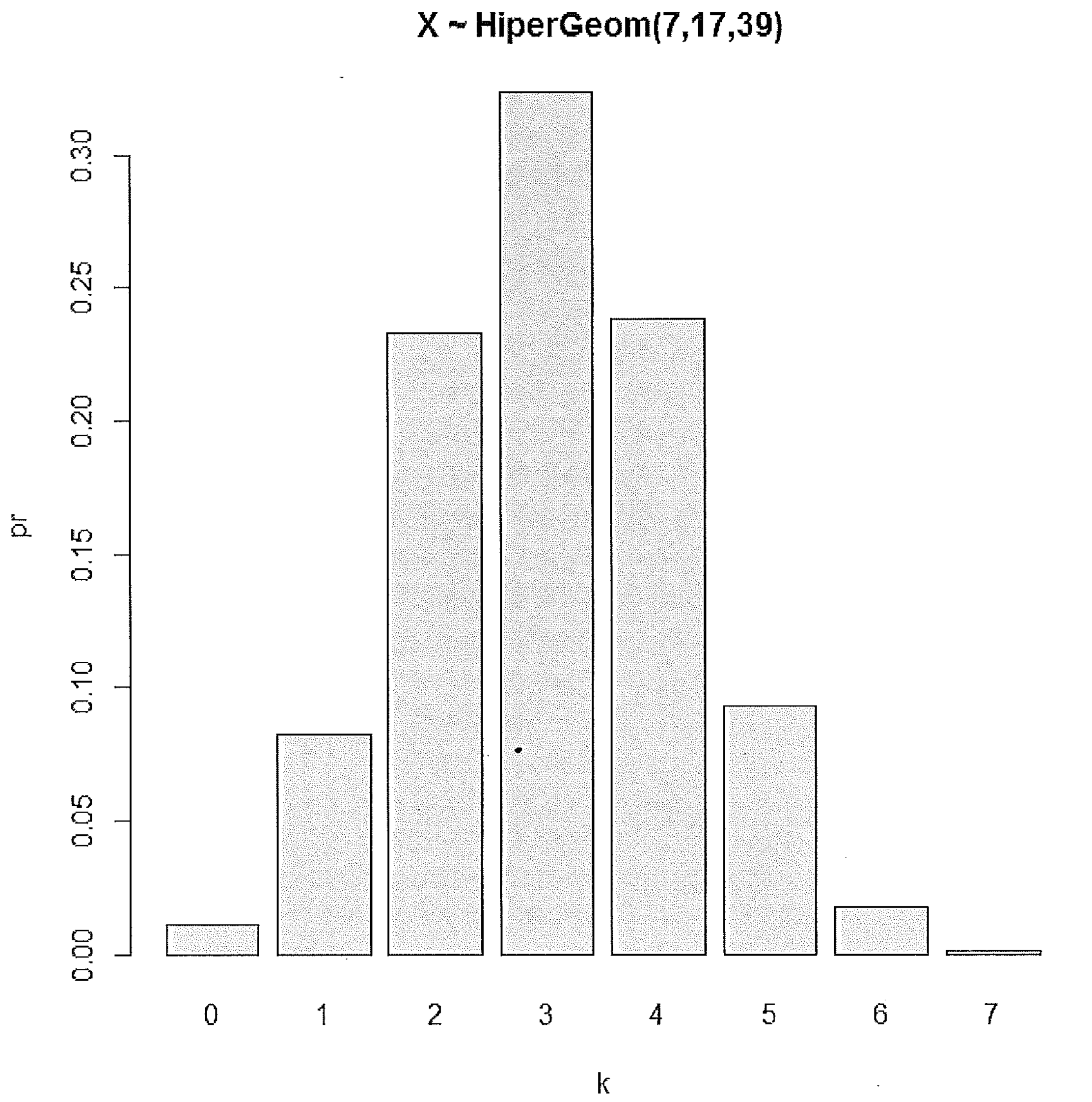
Verjetnosti po vrsti so:

1.709633e-01 3.829577e-01 3.093120e-01 1.145600e-01 2.045714e-02 1.693005e-03 5.643349e-05 5.201244e-07



Verjetnosti po vrsti:

0.0427672254 0.1945908757 0.3335843584 0.2779869653 0.1208638980 0.0271943770 0.0029007336 0.0001115667



Verjetnosti po vrsti:

0.011088011 0.082467082 0.232848233 0.323400323 0.238294975 0.092935040 0.017701912 0.001264422

Geometrijska in negativna binomska porazdelitev

Kovanec mečemo, dokler se ne pojavi prvi grb. Privzamemo, da so meti neodvisni in je verjetnost za grb enaka $p \in (0,1)$.

Opomba: v tem primeru je $\Omega = \{G, \check{S}\}^{\mathbb{N}}$.

Definiramo X = št. metov do prvega grba, vključno s prvim grbom.
Slučajna spremenljivka X ima za možne vrednosti $k = 1, 2, \ldots$.

Velja

$$P(X=k) = P(\underbrace{\check{S}\ldots\check{S}}_{(k-1)\text{-krat}}\ G)$$

$$= (1-p)^{k-1} \cdot p .$$

Opomba: za $\omega = \check{S}\check{S}\check{S}\ldots$ je načeloma $X(\omega) = \infty$, vendar je $P(\{\omega\}) = 0$. Če X ni definirana na kakšni podmnožici, ki ima verjetnost 0, nas to ne bo motilo.

Rečemo, da ima X geometrijsko porazdelitev s parametrom p.

Oznaka: $X \sim \text{Geom}(p)$.

Primer: Igramo ruleto in čakamo, da se pojavi število $n = 17$. Posamezne igre na ruleti so neodvisne in privzamemo, da imajo vsi izidi na ruleti enako verjetnost. Kolikšna je verjetnost, da bomo na številko 17 čakali n iger ali več. V jeziku slučajnih spremenljivk je $X \sim \text{Geom}(1/37)$. Velja

$$P(X \geq n) = P\Big(\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{X = k\}}_{\text{disjunktni dogodki}}\Big)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$= (1-p)^{n-1}$$

Za $n = 17$, recimo, dobimo

$$P(X \geq 17) = \left(1 - \tfrac{1}{37}\right)^{16} \doteq 0.6451$$

Privzemimo, da namesto na en grb čakamo na m grbov, kjer je m fiksno število. Tudi zdaj je $\Omega = \{G, S\}^{\mathbb{N}}$.
Naj bo X število metov do vključno m-tega.

<u>Opomba</u>: Za ω, ki vsebujejo $m-1$ grbov ali manj, je $X(\omega) = \infty$. Vendar je množica / dogodek takih ω dogodek z verjetnostjo 0.

Možne vrednosti X so $k = m, m+1, \ldots$.
Računamo za $k \geq m$

$$P(X = k) = P(\underbrace{** \cdots *}_{\substack{\text{natanko } m-1 \\ \text{grbov v } k-1 \text{ metih}}} G)$$

Izid na k-tem metu je neodvisen od „bloka" metov do (k-1)-ega meta.
To nam med drugim pove lema o I vrednostih. Zapišemo lahko

$$P(X=k) = P(\text{natanko } m-1 \text{ grbov v } k-1 \text{ metih})$$

$$\cdot\, P(\text{grb na } k\text{-tem metu})$$

$$= \binom{k-1}{m-1} p^{m-1} (1-p)^{(k-1)-(m-1)}$$

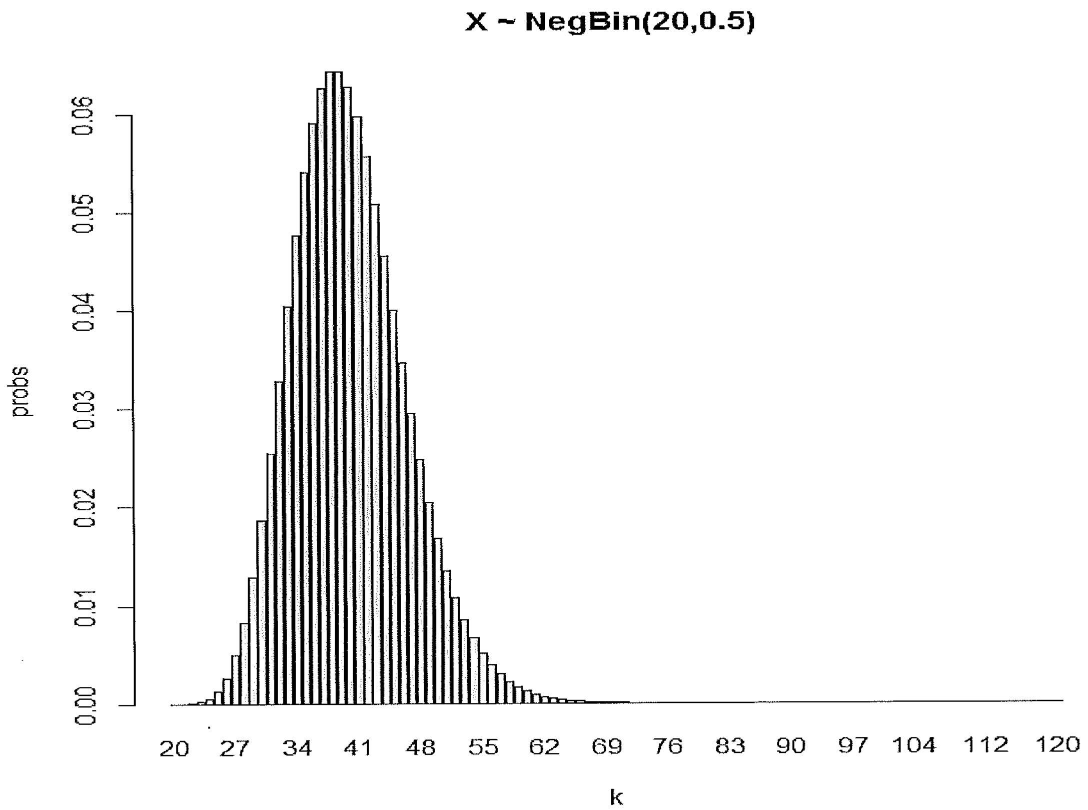
$$\cdot\, p$$

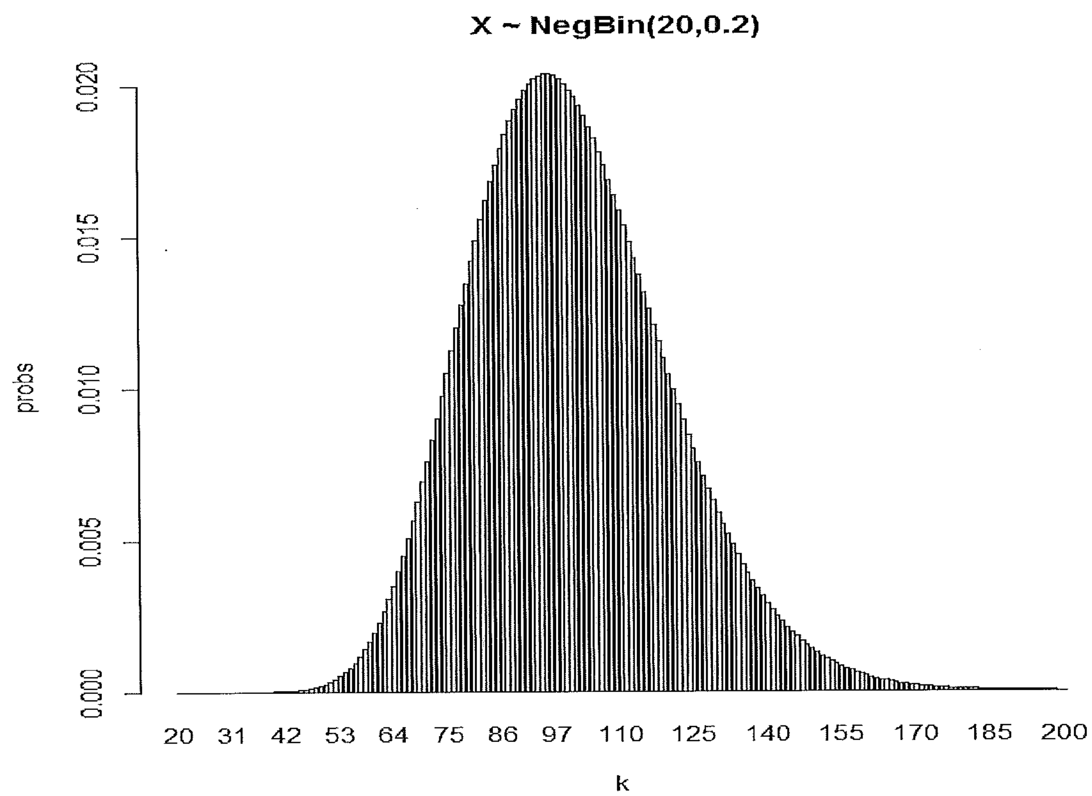
$$= \binom{k-1}{m-1} p^{m} \cdot (1-p)^{k-m}$$

Rečemo, da ima X negativno binomsko porazdelitev s parametroma m in p.

Oznaka: $X \sim \text{NegBin}(m,p)$.

Primera negativne binomske porazdelitve:





Kako bi se prepričali, da je

$$\sum_{k=m}^{\infty} P(X=k) = 1 \ ?$$

Iz Analize 1 vemo, da je za $|x| < 1$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k .$$

Izberimo $a = -m$ in vstavimo $-x$ namesto x. Sledi

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-x)^k$$

Po definiciji je

$$\binom{-m}{k} = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k\, m(m+1)\cdots\cdots(m+k-1)}{k!}$$

Sledi

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m-1} x^k$$

zamenjamo še spremenljivko pri seštevanju v $m+k \to k$. Sledi

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} \cdot x^{k-m}$$

Vstavimo q za x in dobimo

$$\sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} q^{k-m} = (1-q)^{-m} = \frac{1}{p^m}$$

S tem je preverjeno, da je

$$\sum_{k=m}^{\infty} P(X=m) = 1.$$

<u>Primer</u>: Poljski matematik Stefan Banach (1892 - 1945) je bil strasten kadilec, zato je imel v vsakem žepu plašča škatlico vžigalic z n vžigalicami v vsaki. Ko si je želel prižgati cigareto, je naključno segel v enega od žepov in potegnil ven škatlico ter vzel vžigalico.

Če je iz škatlice vzel zadnjo vžigalico, tega ni opazil. Nekoč bo Banach iz žepa potegnil prazno škatlico. Ker je naključno segal v žep, bo v drugi škatlici še X vžigalic. Možne vrednosti za X so $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kakšna je porazdelitev X?

Dogodek $\{X = k\}$ je unija disjunktnih dogodkov

$\{X = k\} \cap \{$Banach je prazno škatlico potegnil iz levega žepa$\}$

$\{X = k\} \cap \{$ — " — desnega žepa$\}$.

Predpostavljamo, da Banach z enako verjetnostjo sega v levi in desni žep.

Slika: Spodaj so po vrsti Banachove cig.

Če želimo, da se zgodi prvi od dogodkov v disjunktni uniji, mora Banach kaditi $(n+(n-k)+1)$-vo cigareto in pri tem točno $(n+1)$-ič seči v levi žep. To zveni kot negativna binomska porazdelitev. Čakamo na $(n+1)$-vi „uspeh" in želimo, da se ta zgodi v $(2n-k+1)$-em poskusu. Sledi

$$P(\{X=k\} \cap \{\text{prazna škatlica bo iz levega žepa}\})$$

$$= \binom{(2n-k+1)-1}{(n+1)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Zaradi simetrije je

$$P(X=k) = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Poissonova porazdelitev

Recimo, da je $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, kjer je n „velik“, p pa „majhen“. Videli smo, da je v takem primeru porazdelitev „stlačena“ v levo. Lahko si mislimo, da $n \to \infty$, p pa proporcionalno zmanjšujemo, recimo, da je $p = \frac{\lambda}{n}$ za nek $\lambda > 0$.

Za fiksen $k = 0, 1, \ldots$ računamo

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to 1}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{po Eulerju.}$$

• Za „velike" n in proporcionalno zmanjšane p je porazdelitev $X \sim Bin(n, p)$ vedno bolj „podobna" porazdelitvi z verjetnostmi

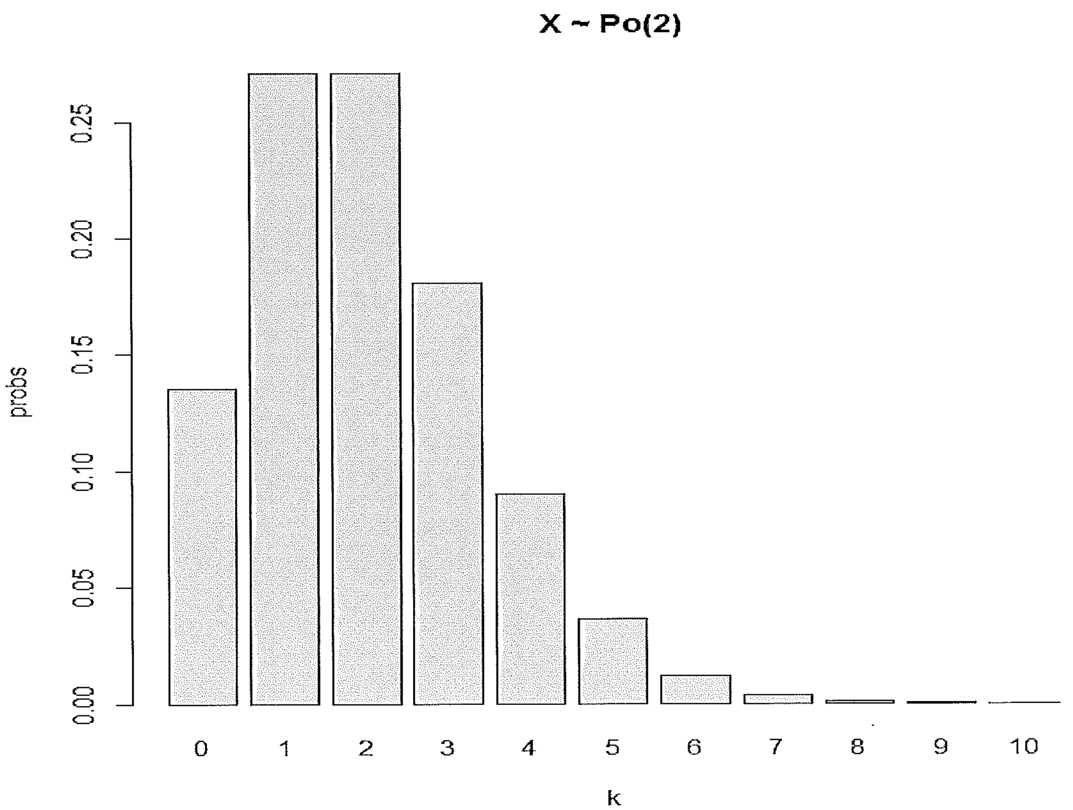
$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

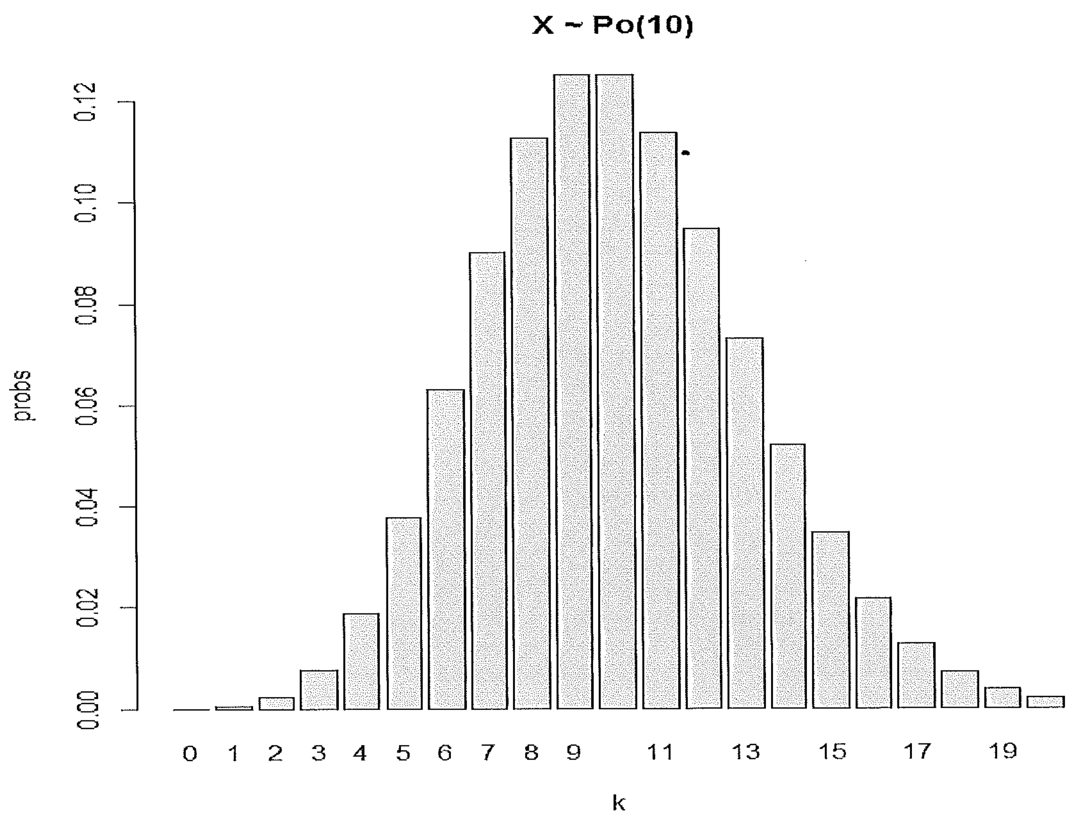
Če velja zgornje, rečemo, da ima X Poissonovo porazdelitev s parametrom λ.

Oznaka: $X \sim Po(\lambda)$.

Porazdelitev ima ime po francoskem fiziku in matematiku Siméonu D. Poissonu (1781 - 1840), ki jo je uporabljal za fizikalne namene.

Primera Poissonove porazdelitve:





2.2 Zvezne slučajne spremenljivke

Do zdaj smo obravnavali slučajne spremenljivke, ki so imele večinoma celoštevilska vrednosti. Lahko si zamislimo slučajne spremenljivke ali slučajna števila, ki so lahko katerokoli vrednost na (a,b) ali $\mathbb{R}$. Primeri so lahko čas do radioaktivnega razpada, življenjska doba, ...

Obdržali bomo definicijo, da je slučajna spremenljivka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, taka da je $X^{-1}((a,b])$ dogodek.

<u>Primer</u>: Recimo, da izbiramo „naključno" število na $[0,1]$. Če izbiramo nepristransko, bi moralo veljati za $[a,b] \subseteq [0,1]$

$$P(X \in [a,b]) = b - a.$$

Posledica je, da je $P(X=x)=0$ za vsak $x \in [0,1]$. Porazdelitve torej ne moremo opisati z verjetnostmi oblike $P(X=x)$.
Ideja je, da nekoliko „popustimo" in se vprašamo, kolikšne so verjetnosti, da X „pade" v nek interval.

<u>Definicija</u>: Naj bo X slučajna spremenljivka. Porazdelitev slučajne spremenljivke je dana z verjetnostmi $P(X \in (a,b])$ za vse $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>Opombe</u>:

(i) Izbrali smo polodprte intervale $(a,b]$. To povzamemo po ISO standardih. Iz izbire sledi, da lahko povemo verjetnost $P(X \in A)$ za vse A, ki jih iz intervalov

$(a, b]$ dobimo s komplementiranjem, preseki in unijami.

(ii) Za diskretno slučajno spremenljivko sta definiciji enakovredni. Če poznamo $P(X \in x_k)$, je

$$P(X \in (a, b]) = \sum_{x_k \in (a,b]} P(X = x_k).$$

Obratno je

$$P(X = x_k) = \lim_{n \to \infty} P\left(X \in \left(x_k - \frac{1}{n}, x_k\right]\right).$$

po Lemi 1.2.

<u>Definicija</u>: Če obstaja nenegativna funkcija $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka da za $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$P(X \in (a, b]) = \int_a^b f_X(x)\, dx,$$

rečemo, da ima X zvezno porazdelitev z gostoto f_X.

Opombe:

(i) Vedno bomo privzeli, da je f_X Riemann integrabilna na $[a,b]$, lahko tudi v posplošenem smislu.

(ii) Po predpostavkah je

$$P(X \in (a,b]) = P(X \in [a,b]).$$

(iii) Za gostote mora veljati

$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Oglejmo si nekaj primerov gostot.

Normalna gostota

Funkcija

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je nenegativna.

Iz Analize 2 vemo, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

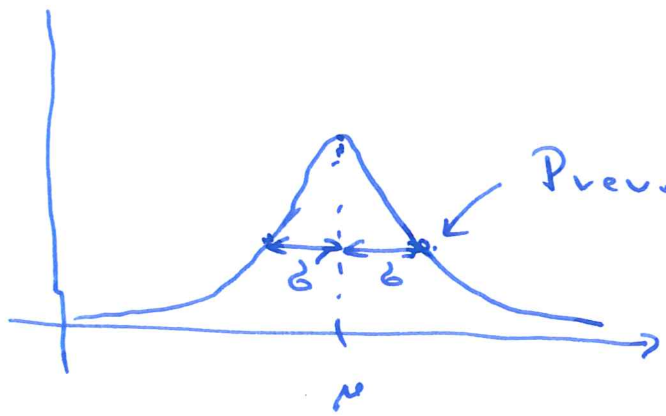
Iz tega s preprosto uvedbo nove spremenljivke sledi, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

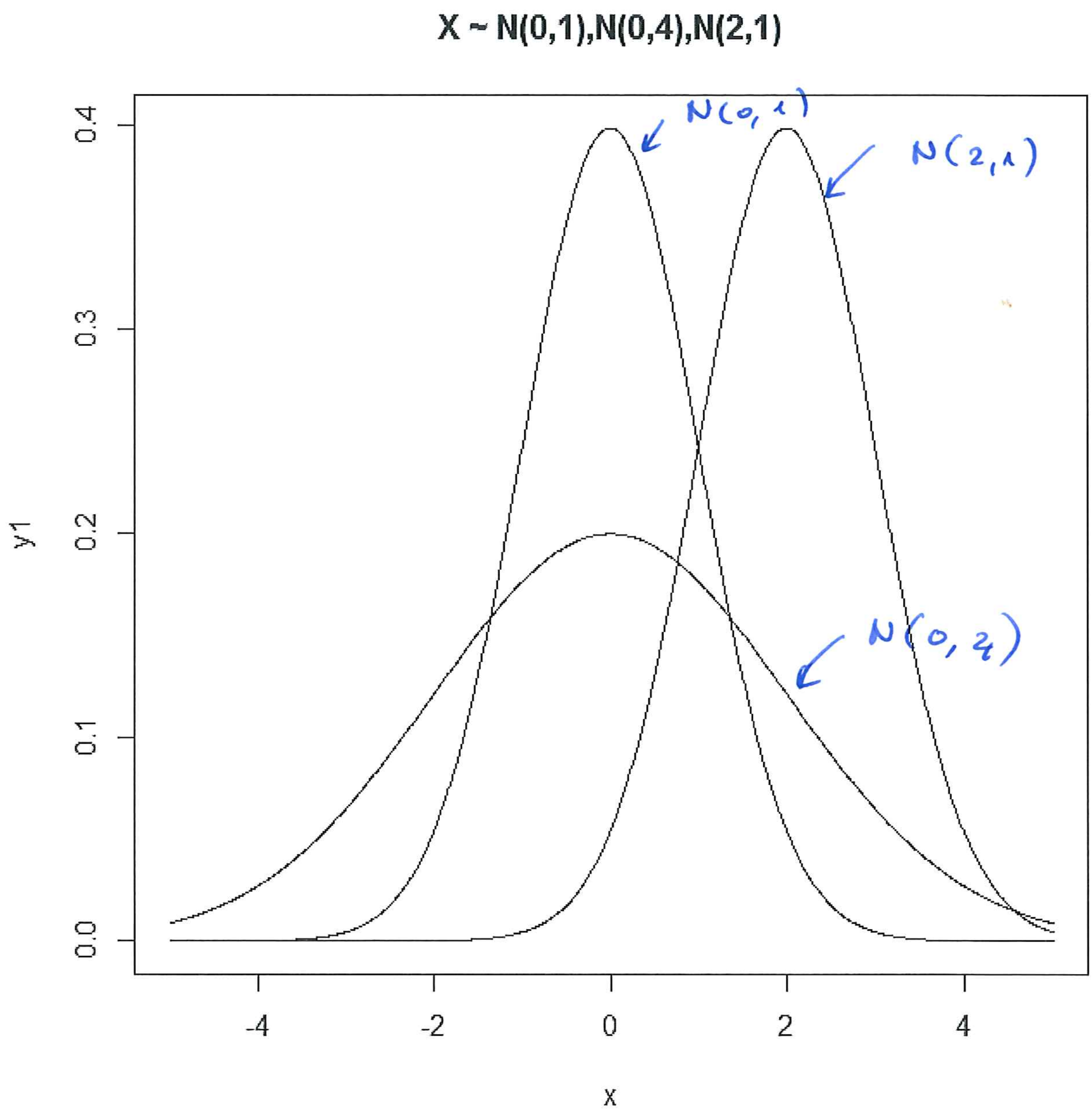
Če ima X zgornjo gostoto, rečemo da je normalno porazdeljena s parametroma $\mu \in \mathbb{R}$ in $\sigma \in (0,\infty)$.

Oznaka: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Slika:



μ je „simetrala" gostote, σ pa je oddaljenost do prevoja. Večji kot je σ, bolj je gostota sploščena in nižja.



Primeri normalnih gostot.

Opomba: Ime normalna porazdelitev je izumil belgijski statistik Adolphe Quételet (1796–1874). Opazil je, da so nekatere karakteristike, kot recimo telesna višina moških, v velikih populacijah porazdeljene v skladu z zgornjo gostoto za ustrezna μ in σ^2. Zato je taka porazdelitev „normalna" v smislu tega, da je običajna.

Eksponentna in gama porazdelitev

Gostoti

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

rečemo eksponentna gostota s parametrom λ in označimo $X \sim \exp(\lambda)$.

Eksponentna gostota je pogosto model za življenjsko dobo.

Če je

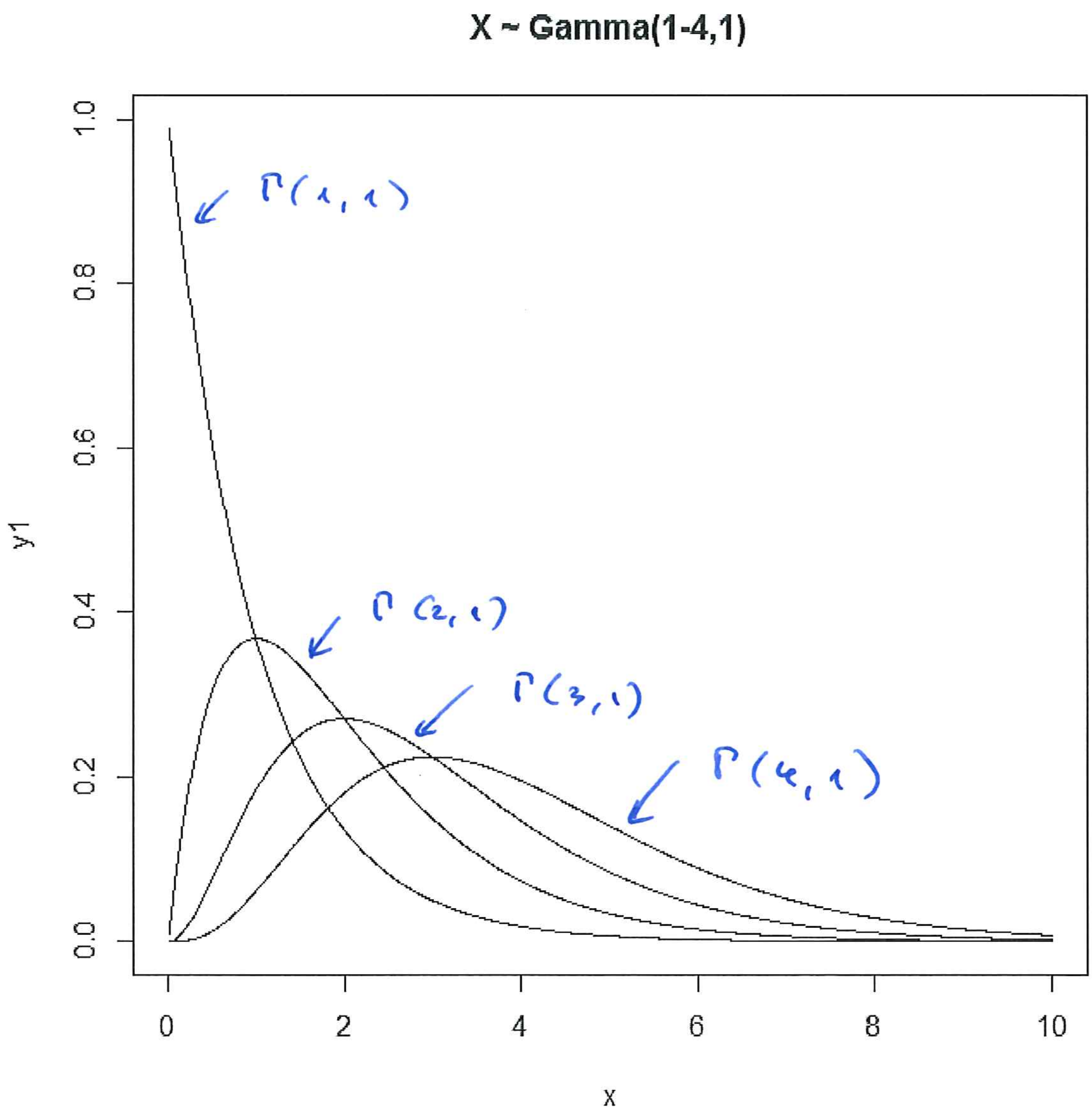
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

za $a, \lambda > 0$ rečemo, da ima X gama gostoto s parametroma a in λ. Parameter a določa obliko gostote, λ pa je stvar izbire enot. Pri tem je

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u}\, du$$

običajna Γ funkcija. Hitro lahko preverimo, da je f_X nenegativna in se integrira v 1.

Oznaka: $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.



Primeri gama porazdelitev. Primeri normalnih gostot:

Opomba: Ko govorimo o zveznih slučajnih spremenljivkah, to ne pomeni, da je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zvezna kot funkcija, temveč to, da je $P(X \in (a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$.
Gre za terminologijo iz teorije mere, ki se nekoliko zlorablja.

Enakomerna porazdelitev

Če želimo izbirati točke naključno na intervalu $[\alpha, \beta]$, tako da je izbira „slepa", bi morala biti gostota na $[\alpha,\beta]$ konstantna.
Tako je $P(X \in (a,b]) \propto b-a$.
To vodi do:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Rečemo, da je X enakomerno porazdeljena na intervalu $[\alpha, \beta]$ in označimo $X \sim U(\alpha, \beta)$.

Beta porazdelitev

Porazdelitev, dana z gostoto

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & \text{za } x \in (0,1); \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

se imenuje Beta porazdelitev s parametroma $a, b > 0$. Iz Analize 2 vemo, da je

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Oznaka: $X \sim \text{Beta}(a,b)$.

Opomba: Za $a = b = 1$ dobimo enakomerno porazdelitev.

Definicija: Naj bo X slučajna spremenljivka. Funkciji

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

rečemo porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X.

Izrek 2.1: Naj bo F_X porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X. Velja:

(i) F_X je nepadajoča.

(ii) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

(iii) F_X je desno zvezna.

Ker je $(a,b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$ in je $(-\infty, a] \subseteq (-\infty, b]$, je

$$P(X \in (a,b]) = F_X(b) - F_X(a).$$

To pomeni, da F_X določa porazdelitev X.

<u>Dokaz</u>:

(i) $F_X(b) - F_X(a) = P(X \in (a,b]) \geq 0.$

(ii) Naj bo $A_n = \{X \leq n\}$. Vemo $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, zato po lemi 1.2

$$\begin{aligned} 1 &= P(X < \infty) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &= \lim_{k \to \infty} P(A_k) \\ &= \lim_{k \to \infty} F_X(n). \end{aligned}$$

Ker je F_X nepadajoča, je

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

Definiramo $B_k = \{X \leq -k\}$. Velja

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ in $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{X = -\infty\}$

Velja

$$0 = P(X = -\infty)$$
$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)$$
$$= \lim_{k \to \infty} P(B_k) \quad \text{(lema 1.2)}$$
$$= \lim_{k \to -\infty} F_X(-k)$$

Ker je F_X nepadajoča, sledi

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$$

(iii) Naj $x_k \downarrow x$, ko $n \to \infty$

$$\{X \leq x\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X \leq x_n\}.$$

Dogodki v preseku so padajoči, zato

$$P(X \leq x) = \lim_{k \to \infty} P(X \leq x_k)$$

ali v drugih otočkah

$$F_X(x) = \lim_{k\to\infty} F_X(x_k),$$

kar je ena od definicij desne zveznosti.

2.3 Funkcije slučajnih spremenljivk

Če je X slučajna spremenljivka, je tudi X^2 slučajna spremenljivka. Če ima X gostoto f_X, kakšna je gostota $Y = X^2$. Vprašanje lahko postavimo za katerokoli funkcijo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, torej za $Y = f(X)$. Za odgovor potrebujemo nekaj dejstev iz Analize 1 in Analize 2.

(i) Če je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)\,du$$

in je g v točki x zvezna, je F_X v točki x odvedljiva in velja $F_X'(x) = g(x)$.

(ii) Naj bosta f, g nenegativni in Riemann integrabilni za vsak interval $[a,b]$. Če velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

za vsaka $a < b$, potem sta f in g skoraj povsod enaki, t.j. razlikujeta se kvečjemu na množici z mero 0. To pomeni, da ima lahko X več različnih gostot, vendar so vse skoraj enake.

Druga posledica tega dejstva je, da če zapišemo

$$P(X \in (a,b]) = \int_a^b g(u)\,du$$

za poljubna $a < b$, mora biti g (ena od verzij) gostote.

<u>Primer</u>: Naj bo $X \sim N(0,1)$, torej

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

<u>Opomba</u>: Gostoti $N(0,1)$ rečemo standardizirana normalna gostota.

Definiramo

$$F_X(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Porazdelitvena funkcija dobi v tem primeru posebno oznako.

Naj bo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oglejmo si

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}.$$

$$P(Z \le z) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \le z\right)$$

$$= P(Y-\mu \le \sigma \cdot z)$$

$$= P(Y \le \sigma \cdot z + \mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Nova spremenljivka:

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du$$

$$= \Phi(z)$$

Zaradi enoličnosti je $Z \sim N(0,1)$.

Med drugim to pomeni, da je

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), \text{ torej}$$

$$F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Porazdelitveno funkcijo vsake normalne porazdelitve lahko zapišemo s Φ.

Podobno lahko ugotovimo naslednje:

če je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in je $Y = aX + b$ za $a \neq 0$, je $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Linearne funkcije normalnih slučajnih spremenljivk so normalno porazdeljene.

Primer: Naj bo $Z \sim N(0,1)$ in $X = Z^2$. Računamo za $x \geq 0$

$$P(X \leq x) = P(Z^2 \leq x)$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x})$$

$$= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$$

$$= 2\left(\Phi(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du.\right)$$

Nova spr.: $u^2 = v$

$du = \frac{dv}{2\sqrt{v}}$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} \frac{1}{2\sqrt{v}} e^{-v/2} dv\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v/2} dv$$

Iz tega sledi, da je

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v/2}, & v > 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

gostota X. Razpoznamo, da je gostota enaka $\Gamma(1/2, 1/2)$ gostoti. Torej je $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

<u>Primer</u>: Predpostavite, da je F_X zvezna in strogo naraščajoča. To pomeni, da obstaja F_X^{-1} na $(0,1)$. Naj bo $U = F_X(X)$. Velja za $u \in (0,1)$

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= P(F_X(X) \leq u) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(u)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(u)) \\ &= u. \end{aligned}$$

To pomeni, da je $U \sim U(0,1)$.

<u>Opomba</u>: Trditev velja tudi, če predpostavljamo zveznost F_X, ne pa tega, da je strogo naraščajoča. V tem primeru namesto inverza uporabimo $F_X^-(u) = \inf\{x : F_X(x) > u\}$

3. Slučajni vektorji

3.1. Diskretni slučajni vektorji

<u>Primer</u>: Recimo, da imamo r škatel in n žogic. Žogice naključno mečemo v škatle s privzetkom, da so meti neodvisni; škatlo i pa zadenemo z verjetnostjo p_i za $i = 1, 2, \dots, r$.

<u>Slika</u>:

Nastane r slučajnih spremenljivk hkrati. Teh r slučajnih spremenljivk tudi hkrati zavzame r vrednosti $k_1, k_2, \dots, k_r$, za katere je $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

V poskusu nastane „objekt", ki ima r komponent. Kot matematiki se takoj spomnimo na besedo vektor. Pišemo

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ in rečemo, da govorimo o slučajnem vektorju, ki ima za vrednosti vektorje $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ s celoštevilskimi nenegativnimi komponentami, ki ustrezajo pogoju $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Kaj pa je analogija porazdelitve?

Za eno slučajno spremenljivko smo navedli verjetnosti $P(X = x_k)$ za vse možne vrednosti slučajne spremenljivke. Tu je analogija očitna. Navesti moramo $P(\underline{X} = \underline{x}_k)$ za vse možne (vektorske $\underline{x}_k$).

Dogodek

$$\{X_1 = k_1\} \cap \{X_2 = k_2\} \cap \ldots \cap \{X_r = k_r\}$$

se lahko zgodi na več disjunktnih načinov. Vsi so oblike, da po vrsti zadenemo škatle

$$i_1\, i_2\, i_3 \ldots \, i_n \,,$$

zaporedje pa vsebuje k_1 enk, k_2 dvojk, ..., k_r r-jev. Vsako tako zaporedje zadetkov ima zaradi privzetka neodvisnosti verjetnost

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} .$$

Zaporedja, ki imajo predpisano število enk, dvojk, ... pa preštejemo tako, da po vrsti izbiramo pozicije za enke, potem dvojke, ... Po osnovnem izreku kombinatorike dobimo

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-1}}{k_r} .$$

ko pokrajšamo, dobimo

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}$$

Opomba: To je število permutacij s ponavljanjem.

Verjetnost dogodka $\{X_1 = k_1\} \cap \ldots \cap \{X_r = k_r\}$ zapišemo poenostavljeno z

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r)$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\;\;k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

za vse nabore $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ z $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Rečemo, da ima $\underline{X}$ multinomsko porazdelitev s parametroma n in $\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$

Oznaka: $\underline{X} \sim \text{Multinom}(n, \underline{p})$.

Navedimo še formalne definicije.

<u>Definicija</u>: Slučajni vektor $\underline{X}$ je funkcija $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, tako da je $\underline{X}^{-1}(U)$ dogodek za vsako odprto množico U v $\mathbb{R}^n$.

<u>Opomba</u>: Odprte množice so praktična, ne pa edina izbira.

<u>Definicija</u>: Slučajni vektor $\underline{X}$ je diskreten, če je zaloga vrednosti $\underline{X}$ končna ali števna množica $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots\}$.

Za opis porazdelitve diskretnega slučajnega vektorja je dovolj, da navedemo verjetnosti $P(\underline{X} = \underline{x}_k)$ za vse možne vrednosti slučajnega vektorja $\underline{X}$.

V splošnem pa bomo vzeli naslednjo definicijo.

<u>Definicija</u>: Porazdelitev slučajnega vektorja $\underline{X}$ je dana z verjetnostmi $P(\underline{X} \in U)$ za vse odprte množice $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

<u>Opomba</u>: Odprte množice izberemo zaradi praktičnosti. Lahko bi izbrali zaprte ali kompaktne. V okviru teorije mere lahko pokažemo, da bo dobro definirana tudi verjetnost $P(\underline{X} \in A)$ za vse Borelove množice.

Nekaj več o tem je v dodatku B.

Opomba: Iz definicij lahko takoj izpeljemo, da je $\underline{X}$ slučajni vektor, če in samo če so vse komponente slučajne spremenljivke.

Če bo komponent malo, bomo pogosto pisali $P(X=x, Y=y)$ namesto $P((X,Y)=(x,y))$. Porazdelitvi $\underline{X}$ bomo rekli tudi večrazsežna ali skupna porazdelitev.

Vrnimo se k multinomski porazdelitvi. Iz vsebine sledi, da je $X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, r$.

Oglejmo si še potrditev z računom. Vzemimo kar $i=1$. Za fiksen k_1 računamo

$$P(X_1 = k_1)$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in R(\underline{X})} P(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r)$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in R(\underline{X})} \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \, p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k_1+1)}{k_1!} \cdot p_1^{k_1} \sum_{\substack{(k_2, \dots, k_r) \\ k_i \geq 0 \\ \sum_{i=2}^{r} k_i = n-k_1}} \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdots k_r!} \, p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (1-p_1)^{n-k_1} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{(k_2, \dots, k_r) \\ k_i \geq 0 \\ \sum_{i=2}^{r} k_i = n-k_1}} \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdots k_r!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{p_r}{1-p_1}\right)^{k_r}}_{= \underline{1}}$$

(vsota verjetnosti v multinomski porazdelitvi

$$= \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (1-p_1)^{n-k_1}, \quad k_1 = 0, 1, \dots, n;$$

Pokazali smo, da je $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$, podobno pa velja tudi za ostale komponente.

<u>Definicija</u>:

(i) Naj bo $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ slučajni vektor. Porazdelitvam komponent $X_1, \ldots, X_r$ rečemo <u>robne</u> porazdelitve.

(ii) Naj bo $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ slučajni vektor. Porazdelitvam vsakega podnabora $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_s})$ za $s < r$ rečemo večrazsežne robne porazdelitve.

<u>Primer</u>: Naj bo $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_r) \sim \mathrm{Multinom}(n, \underline{p})$ in $s < r$. Porazdelitev $(X_1, X_2, \ldots, X_s)$?

Računamo za fiksne $k_1, k_2, \dots, k_s$.

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_s = k_s)$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_s, \dots, k_r) \in R(\underline{X})} P(X_1 = k_1, \dots, X_s = k_s, \dots, X_r = k_r)$$

$$= \sum_{\substack{k_{s+1}, \dots, k_r \\ k_i \geq 0,\ i > s \\ \sum_{i=s+1}^{n} k_i = n - k_1 - \dots - k_s}} \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k_1-\dots-k_s+1)}{k_1! \dots k_s!} p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k_{s+1}, \dots, k_r \\ k_i \geq 0,\ i > s \\ \sum_{i=s+1}^{n} k_j = n - k_1 - \dots - k_s}} \frac{(n-k_1-\dots-k_s)!}{k_{s+1}! \dots k_r!} p_{s+1}^{k_s} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k_1-\dots-k_s+1)}{k_1! \dots k_s!} p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} \times$$

$$\times (1-p_1-\dots-p_s)^{n-k_1-\dots-k_s}$$

$$\underbrace{\sum_{-''-} \frac{(n-k_1-\dots-k_s)!}{k_1! \dots k_s!} \left(\frac{p_{s+1}}{1-p_1-\dots-p_s}\right)^{k_{s+1}} \cdots \left(\frac{p_r}{1-p_1-\dots-p_s}\right)^{k_r}}_{=1}$$

sledi

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_s = k_s)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k_1-\cdots-k_s+1)}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_s!} \times$$

$$\times\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} (1-p_1-\cdots-p_s)^{n-k_1-\cdots-k_s}$$

za nabore $(k_1, \ldots, k_s)$ z $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{s} k_i \leq n$.

<u>Opomba o oznakah</u>

Če za fiksen x seštevamo

$$\sum_{y:\,(x,y)\in R(\underline{X})} P(X=x, Y=y),$$

potem bomo pisali

$$\sum_y P(X=x, Y=y)$$

in razumeli, da seštevamo po zalogi vrednosti z fiksnim x.
Podobno bo veljalo, če bomo

pisali

$$\sum_z P(X=x, Y=y, Z=z).$$

Pri tem bosta x, y fiksna, z pa bo tekel po vseh trojicah $(x,y,z) \in R(\underline{X})$.

Primer: Naj bo

$$P(X=k, Y=l)$$

$$= \sum_{i=0}^{\min(k,l)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^{l-i}}{(l-i)!}$$

Porazdelitev X? Po formuli za robno porazdelitev bo

$$P(X=k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X=k, Y=l)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(k,l)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^{l-i}}{(l-i)!}$$

$$=$$

$$= \sum_{l=0}^{k} -''- \quad + \quad \sum_{l=k+1}^{\infty} -''-$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \sum_{i=0}^{l} -''- \quad + \quad \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} -''-$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=i}^{k} -''- \quad + \quad \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=k+1}^{\infty} -''-$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=i}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^{l-i}}{(l-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \times \underbrace{\sum_{l=i}^{\infty} \frac{e^{-\nu}\nu^{l-i}}{(l-i)!}}_{=1, \text{ ker je to vsota verj. v } Po(\nu) \text{ porazdelitvi}}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{i}\mu^{k-i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^{k}$$

Sklep: $X \sim Po(\lambda)$.

<u>Opomba</u>: Za slučajni spremenljivki X in Y formuli za robni porazdelitvi zgledata kot

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y),$$

kjer smo konvencijo o seštevanju omenili že prej.

<u>Opomba</u>: Iz definicije slučajnega vektorja $\underline{X}$ sledi, da so množice $\underline{X}^{-1}(A)$ dogodki za vse množice, ki jih iz odprtih dobimo s komplementiranjem, štetnimi unijami in preseki. Takim množicam smo rekli Borelove množice.

Primer: Naj bo Π slučajna permutacija in naj velja $P(\Pi = \pi) = \frac{1}{n!}$ za vse $\pi \in S_n$.

Permutacijo napišemo kot produkt ciklov in preštejemo, koliko ciklov je dolžine i za $i = 1, 2, \ldots, n$. Naj bo X_i število ciklov dolžine i in $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Porazdelitev $\underline{X}$? Možne vrednosti $\underline{X}$ so nabori $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ z $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$. Računamo

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n)$$

$$= \frac{\#\ \text{ugodnih permutacij}}{n!}$$

Prešteti moramo permutacije, ki imajo predpisano število ciklov vsake dolžine. Ideja: narišimo cikle, potem pa jih bomo napolnili s števili.

$$\underbrace{(\,)(\,)\cdots(\,)}_{k_1 \text{ ciklov dolžine } 1}\underbrace{(\quad)(\quad)}_{k_2 \text{ ciklov dolžine } 2}(\qquad)\ \ldots$$

Števila od 1 do n permutiramo in „potaknemo" v oklepaje od leve proti desni.

$$(5)(10)\cdots(2)(6\ 4)(8\ 3)(1\ 9\ 7)\ \ldots$$

Če števila v oklepajih interpretiramo kot cikle, smo ustvarili novo permutacijo s predpisanim številom ciklov. Koliko permutacij pa generira iste cikle? Najprej lahko permutiramo cikle vsake dolžine. To lahko naredimo na $k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!$ načinov.

Če znotraj obstoječih ciklov ciklično premaknemo številke, se generirana permutacija tudi ne spremeni. Primer:

$$(1\ 9\ 7) \to (9, 7, 1) \to (7, 1, 9)$$

Ciklično lahko permutiramo na

$$1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdots n^{k_n}$$

načinov. Imamo torej preslikavo iz S_n v S_n, ki vsaki od $n!$ permutacij priredi permutacijo s predpisanim številom ciklov. Praslika permutacije s predpisanim številom ciklov pa je vedno enako močna. Sledi, da je takih permutacij, torej tistih s predpisanim številom ciklov

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_n! \cdot 1^{k_1} \cdots n^{k_n}},$$

torej

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k_1! \cdots k_n! \cdot 1^{k_1} \cdots n^{k_n}}$$

za $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$.

Formuli rečemo Ewensova formula.

<u>Neodvisnost</u>

Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Kdaj pa bi rekli, da sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Po definiciji sta $X^{-1}(A)$ in $X^{-1}(B)$ neodvisni za odprti A in B. Definicija neodvisnosti bi morala biti taka, da sta dogodka neodvisna za vsako izbiro A in B.

Praslike $X^{-1}(A)$ so „generični" dogodki „povezani" s slučajno spremenljivko X. To nas navede na:

Definicija

(i) Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če je

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$$

za vsako izbiro odprtih A in B.

(ii) Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne, če je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i\in A_i)$$

za vsako izbiro odprtih množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(iii) Družina $\{X_i\}_{i\in I}$ slučajnih spremenljivk je neodvisna, če so neodvisne slučajne spremenljivke v vsaki končni poddružini.

(iv) Vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ sta neodvisna, če je

$$P(\underline{X} \in A, \underline{Y} \in B) = P(\underline{X} \in A) \cdot P(\underline{Y} \in B)$$

za vsako izbiro odprtih množic v ustreznih $\mathbb{R}^n$.

<u>Opombe</u>:

(i) V definiciji bi lahko vzeli Borelove množice namesto odprtih.

(ii) Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskretne, je dovolj, da zahtevamo

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

za vse možne $(x_1, \ldots, x_n)$.

<u>Opozorilo</u>: Zgornje mora veljati za <u>vse</u> $(x_1, \ldots, x_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} R(X_i)$!

Kako lahko hitro presodimo, ali sta X in Y neodvisni?

<u>Izrek 3.1</u>: Naj bosta X, Y diskretni slučajni spremenljivki, za kateri je

$$P(X=x, Y=y) = f(x)\,g(y)$$

za vse $(x,y) \in R(X) \times R(Y)$. Potem sta X in Y neodvisni.

<u>Dokaz</u>: Za fiksen x je po formuli za robne porazdelitve

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \sum_y P(X=x, Y=y) \\ &= f(x) \sum_y g(y) \\ &= c_1 f(x) \end{aligned}$$

za neko konstanto c_1. Podobno je $P(Y=y) = c_2\, g(y)$.

Sledi, da je po predpostavki

$$P(X=x, Y=y) = \frac{P(X=x)\cdot P(Y=y)}{c_1 \cdot c_2}$$

Seštejemo levo in desno stran po $(x,y) \in R(X) \times R(Y)$ in dobimo

$$1 = \sum_{x,y} P(X=x, Y=y)$$

$$= \frac{1}{c_1 \cdot c_2} \sum_{x,y} P(X=x) P(Y=y)$$

$$= \frac{1}{c_1 \cdot c_2} \left(\sum_x P(X=x) \right) \left(\sum_y P(Y=y) \right)$$

$$= \frac{1}{c_1 \cdot c_2},$$

torej $c_1 \cdot c_2 = 1$. S tem je dokaz zaključen.

<u>Opomba</u>: Dokaz velja dobesedno, če sta $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ slučajna vektorja.

Opomba: Množili smo neskončni vsoti. Ali to smemo? K temu vprašanju se bomo vrnili.

Primer: Recimo, da je v družini N otrok z $N \sim Po(\lambda)$. Vsak otrok je fant ali deklica z enako verjetnostjo $1/2$ neodvisno od ostalih.

Opomba: Lahko si mislimo, da gledamo neodvisne mete kovancev, vendar jih vzamemo $N \sim Po(\lambda)$, kjer je N neodvisna od metov kovancev.

Naj bo $X = \#$ fantov v družini in $Y = \#$ deklet v družini.

$$P(X=k, Y=l)$$

$$= P(X=k, Y=l, N=k+l)$$

$$= P(X=k, Y=l \mid N=k+l)\, P(N=k+l)$$

$$= (*)$$

$$(*) = \binom{k+l}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda/2}\cdot\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda/2}\cdot\left(\lambda/2\right)^l}{l!}$$

$$= f(k)\cdot g(l)$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni.

<u>Primer</u>: Generatorji slučajnih števil v igralnih avtomatih tipično generirajo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$, za katere predpostavljamo, da so neodvisne in enakomerno porazdeljene na $\{1, 2, \ldots, m\}$ za fiksen m. Definirajmo

Y_1 = dolžina segmenta strogo naraščajočih $X_1, X_2, \ldots$

<u>Primer</u>: če imamo $3, 5, 6, 7, 2, 6$ na začetku, je $Y_1 = 4$.

Y_2 = zadnje število v naraščajočem segmentu

U primeru: $Y_2 = 7$

Y_3 = prvo naslednje število po naraščajočem segmentu

Primer: $Y_3 = 2$

Y_4 = drugo naraščajoče število po naraščajočem segmentu

Primer: $Y_4 = 6$

Če so y_1, y_2, y_3, y_4 možne vrednosti Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, mora veljati:

$$y_1 \le y_2 \le n, \quad Y_3 \le y_2, \quad 1 \le y_4 \le n.$$

Veljati mora

$$\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, Y_3 = y_3, Y_4 = y_4\}$$

$$= \bigcup_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_{y_1}, k_{y_1+1}, k_{y_1+2} \\ k_1 < k_2 < \dots < k_{y_1},\ k_{y_1} = y_2 \\ k_{y_1+1} \le k_{y_1} \\ 1 \le k_{y_1+2} \le n}} \{X_1 = k_1, \dots, X_{k_{y_1+2}} = k_{y_1+2}\}$$

Dogodki v uniji so disjunktni in imajo zaradi neodvisnosti $X_1, X_2, \ldots$ vsi verjetnost $\frac{1}{m^{y_1+2}}$.

Število dogodkov v uniji je

$$\underbrace{\binom{y_2-1}{y_1-1}}_{\text{Toliko je izbir } k_1<k_2<\ldots<k_{y_1},\ k_{y_1}=y_2} \times \underbrace{y_2}_{\text{pri danem } y_2 \text{ je toliko izbir za } y_3} \times \underbrace{m}_{\text{Toliko je izbir } \text{za } y_4}$$

Sledi

$$P(Y_1=y_1,\ Y_2=y_2,\ Y_3=y_3,\ Y_4=y_4)$$

$$= \binom{y_2-1}{y_1-1}\cdot y_2 \cdot m \cdot \frac{1}{m^{y_1+2}}$$

Če je $\underline{X}_1=(Y_1,Y_2,Y_3)$ in $X_2=Y_4$ vezhemo

$$P(\underline{X}_1=\underline{x},\ Y_4=y_4)=P(\underline{X}_1=\underline{x})\,P(Y_4=y_4),$$

kar pomeni, da sta (Y_1,Y_2,Y_3) in Y_4 neodvisna.

3.2. Pričakovana vrednost

Primer: Obravnavali smo igro na srečo, v kateri imamo 12 ploščic

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{D}\ \boxed{S}\ \boxed{S}\ \boxed{S}\ \boxed{S}$.

Ploščice se na ekranu obrnejo in slučajno permutirajo, tako da igralec vidi

Igralec nato „odpira" ploščice od leve proti desni, dokler ne zadene na prvi $\boxed{S}$ = STOP. Izplačilo je vsota števk, pomnožena z 2, če je vidna tudi ploščica $\boxed{D}$.

Koliko ste največ pripravljeni plačati, da lahko igrate to igro?

Postavimo se na stališče, da je izplačilo v eni igri slučajna spremenljivka z vrednostmi $\{v_1, v_2, \ldots, v_{18}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$.

Predstavljamo si lahko, da igro mnogokrat ponavljamo, torej „ponavljamo" slučajno spremenljivko X. Dobimo izplačila $x_1, x_2, \ldots\ldots$. Največja cena, ki smo jo pripravljeni plačati, bi bilo „dolgoročno" povprečje

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

To povprečje prepišemo v

$$\frac{v_1 \times \#\,\text{pojavitev}\ 1 + v_2 \times \#\,\text{pojavitev}\ 2 + \ldots}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{17} v_i \times \underbrace{\frac{\#\,\text{pojavitev}\ i}{n}}_{\approx P(X = i)}$$

To motivira naslednjo definicijo.

<u>Definicija</u>: Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Pričakovano vrednost X definiramo kot

$$E(X) = \sum_{x_k} x_k \cdot P(X = x_k).$$

Pričakovana vrednost obstaja, če konvergira vrsta $\sum_{x_k} |x_k| \cdot P(X = x_k)$.

Recimo, da je f funkcija in $Y = f(X)$. Če je X diskretna, je taka tudi Y. Recimo, da ima vrednosti $\{y_1, y_2, \ldots\}$. Računamo

$$E(Y) = \sum_y y \cdot P(Y = y)$$

$$= \sum_y y \sum_{\{x : f(x) = y\}} P(X = x)$$

$$= \sum_{x} f(x)\, P(X = x)$$

Velja torej

$$E[f(X)] = \sum_{x} f(x)\, P(X = x).$$

Če obstaja $\sum_{x} |f(x)|\, P(X = x)$, potem obstaja tudi $E(Y)$.

Izračunajmo nekaj primerov pričakovanih vrednosti.

<u>Primer</u>: Naj bo $X \sim Bin(n, p)$.

Računamo

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k} \qquad q := 1 - p$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot n \cdot p^{k} q^{n-k}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}}_{=1.}$$

$$= np$$

Vsota je 1, ker seštevamo verjetnosti v $\mathrm{Bin}(n-1, p)$ porazdelitvi.

Podobno je

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [k(k-1)+k] P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) P(X=k) + np$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)}}_{=1} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$= n^2p^2 + npq$$

Vsota je 1, ker je vsota verjetnosti v $\mathrm{Bin}(n-2, p)$ porazdelitvi.

Primer: $X \sim NegBin(m, p)$

$$E(X) = \sum_{k=m}^{\infty} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} k \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{(k+1)-1}{(m+1)-1} \cdot m\, p^m q^{k-m}$$

$$= \frac{m}{p} \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} \binom{(k+1)-1}{(m+1)-1} p^{m+1} q^{(k+1)-(m+1)}}_{=1}$$

$$= \frac{m}{p}$$

Vsota je 1, ker seštevamo verjetnosti v $NegBin(m+1, p)$ porazdelitvi.

Podobno je

$$E(X^2) = \sum_{k=m}^{\infty} k^2\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \left((k+1)k - k\right) P(X=k)$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} (k+1)k \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} - \frac{m}{p}$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{(k+2)-1}{(m+2)-1} m(m+1) p^m q^{k-m} - m/p$$

$$= \frac{m(m+1)}{p^2} \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} \binom{(k+2)-1}{(m+2)-1} p^{m+2} \times q^{(k+2)-(m+2)}}_{=1} - m/p$$

$$= \frac{m(m+1)}{p^2} - \frac{m}{p}$$

$$= \frac{m^2}{p^2} + \frac{m \cdot q}{p^2}$$

Vsota je 1, ker seštevamo verjetnosti v NegBin$(m+2, p)$ porazdelitvi.

Primer: Igramo ruleto in stavimo na rdeče. Če zmagamo, nam stavo 1 € vrnejo in dobimo še en 1 €, sicer stavo izgubimo. Čisti dobiček je 1 ali −1 (izguba). Če ga označimo z X, je $P(X=1) = 18/37$ in $P(X=-1) = 19/37$. Sledi

$$E(X) = (-1)\cdot 19/37 + 1 \cdot 18/37$$

$$= -1/37$$

Primer: $X \sim Po(\lambda)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= (*)$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)+k] \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

Najpomembnejša lastnost pričakovane vrednosti je linearnost. Če sta X in Y diskretni slučajni spremenljivki, je tudi $Z = X + Y$ diskretna slučajna spremenljivka. Recimo, da ima vrednosti v $R(Z) = \{z_1, z_2, \ldots\}$. Po definiciji je

$$E(Z) = \sum_z z\, P(Z = z)$$

$$= \sum_z z \cdot \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(X = x, Y = y)$$

$$= (*)$$

$$(*) = \sum_{z} \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} (x+y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} (x+y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x} x \sum_{y} P(X=x, Y=y)$$

$$+ \sum_{y} y \sum_{x} P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x} x P(X=x)$$

$$+ \sum y P(Y=y)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Bolj splošno lahko pokažemo, da je

$$E[f(X,Y)] = \sum_{x,y} f(x,y) P(X=x, Y=y).$$

Dodatek A

Naj bo I števna množica, ki ni urejena. Tipičen primer je lahko $\mathbb{Z}^d$. Naj bo vsakemu $i \in I$ prirejeno neko realno število a_i. Definirajmo za $a \in \mathbb{R}$

$$a_+ = \max(0, a) = \frac{a + |a|}{2} \quad \text{in}$$

$$a_- = \max(0, -a) = \frac{-a + |a|}{2}$$

Očitno velja $a_+ - a_- = a$ in velja neenačba

$$(a+b)_+ = \frac{a+b+|a+b|}{2} \leq \frac{a+b+|a|+|b|}{2}$$

$$= a_+ + b_+$$

Radi bi definirali $\sum_{i \in I} a_i$. Najprej za $a_i \geq 0$ rečemo

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\substack{K \subseteq I \\ K \text{ končna}}} \sum_{i \in K} a_i$$

Rečemo, da vsota obstaja, če je supremum končen. Če a_i niso nenegativni, potem pišemo $a_i = a_i^+ - a_i^-$ in definiramo

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$

in rečemo, da vsota obstaja, če sta oba člena na desni končna.

Lema A.1: Vsota $\sum_{i\in I} a_i$ obstaja, če in samo če obstaja $\sum_{i\in I} |a_i|$.

Dokaz: Naj obstaja $\sum_{i\in I} a_i$. Potem je za vsako končno $K \subseteq I$

$$\sum_{i\in K} a_i^+ \leq M \quad \text{in} \quad \sum_{i\in K} a_i^- \leq M.$$

Sledi, da je

$$\sum_{i\in K} |a_i| = \sum_{i\in K} a_i^+ + \sum_{i\in K} a_i^- \leq 2M.$$

Obrat sledi iz očitnih neenačb $0 \leq a_i^+ \leq |a_i|$ in $0 \leq a_i^- \leq |a_i|$.

Komentar: V primeru vrst je definicija ekvivalentna absolutni konvergenci.

Lema A.2: (i) Naj $\sum_{i\in I} a_i$ obstaja. Velja

$$\sum_{i\in I} c\cdot a_i = c\cdot \sum_{i\in I} a_i.$$

(ii) Naj obstajata $\sum_{i \in I} a_i$ in $\sum_{i \in I} b_i$.

Potem obstaja $\sum_{i \in I} (a_i + b_i)$ in je

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

Dokaz: (i) sledi iz definicij.

(ii) Ker je $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$, je obstoj $\sum_{i \in I} (a_i + b_i)$ zagotovljen. Iz definicij sledi, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja končna množica K_ε, da je

$$\left| \sum_{i \in K_\varepsilon} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i \in K_\varepsilon} b_i - \sum_{i \in I} b_i \right| < \varepsilon$$

in

$$\left| \sum_{i \in K_\varepsilon} (a_i + b_i) - \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \right| < \varepsilon.$$

Velja $\sum_{i \in K_\varepsilon} (a_i + b_i) = \sum_{i \in K_\varepsilon} a_i + \sum_{i \in K_\varepsilon} b_i$.

Iz trikotniške neenakosti sledi, da je

$$\left| \sum_{i \in I} (a_i + b_i) - \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i \right| \leq 3\varepsilon.$$

Neenačba velja za vse $\varepsilon > 0$, tako je trditev dokazana.

Za namene verjetnosti bomo pogosto pri seštevanju števila grupirali:

<u>Lema A.3</u>: Naj bo $\{I_j : j \in J\}$ particija I, njer je J števna in $a_i \geq 0$. za $i \in I$. Vsota $\sum_i a_i$ obstaja, če in samo če obstaja $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right)$. Če vsoti obstajata, sta enaki.

<u>Dokaz</u>: Predpostavimo, da $\sum_i a_i$ obstaja. Izberimo si $\varepsilon > 0$ in $\varepsilon_j > 0$, da bo $\sum_{j \in J} \varepsilon_j \leq \varepsilon$. Po predpostavki je $\sum_{i \in I_j} a_i < \infty$ za vse $j \in J$. Naj bo $K \subseteq J$ končna. Po definiciji obstajajo končne $I_j' \subseteq I_j$, da je $\sum_{i \in I_j'} a_i > \sum_{i \in I_j} a_i - \varepsilon_j$. Ocenimo

$$\sum_{j \in K} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right) \leq \sum_{j \in K} \left(\sum_{i \in I_j'} a_i + \varepsilon_j \right)$$

$$\leq \sum_{i \in \bigcup_{j \in K} I_j'} a_i + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{i \in I} a_i + \varepsilon$$

Iz razmisleka sledi, da je $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right) \leq \sum_{i \in I} a_i$

Obratno predpostavimo, da $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)$ obstaja, kar pomeni, da obstajajo notranje vsote. Naj bo $L \subseteq I$ končna. Obstajajo končne množica $K \subseteq J$ in končne $I_j' \subset I_j$ za $j \in K$, da bo $L \subseteq \bigcup_{j\in K} I_j'$. Velja

$$\sum_{i\in L} a_i \le \sum_{i\in \bigcup_{j\in K} I_j'} a_i$$

$$= \sum_{j\in K}\left(\sum_{i\in I_j'} a_i\right)$$

$$\le \sum_{j\in K}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)$$

$$\le \sum_{j\in K}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)$$

Enakost sledi iz obeh neenačb.

<u>Komentar</u>: Če ena vsota ne obstaja, ne obstaja tudi druga.

<u>Lema A.4:</u> Naj bo $\{I_j : j \in J\}$ particija I. Vsota $\sum_i a_i$ obstaja, če in samo če obstaja $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\right)$. Če ena od vsot obstaja, obstaja tudi druga in je $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)$.

Dokaz: Hkraten obstoj vsot sledi iz leme A.3.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji obstaja končna množica $L \subseteq I$, da velja

$$\sum_{i \in L} a_i^+ \geq \sum_{i \in I} a_i^+ - \varepsilon \quad \text{in}$$

$$\sum_{i \in L} a_i^- \geq \sum_{i \in I} a_i^- - \varepsilon .$$

Za vsako končno $L' \supseteq L$ posledično velja

$$\left| \sum_{i \in L'} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| \leq 2\varepsilon .$$

Naj bodo $\varepsilon_j > 0$, $j \in J$, taki da je $\sum_j \varepsilon_j \leq \varepsilon$.

Za vsak $j \in J$ obstaja končen $I_j' \subseteq I_j$, da bo $\left| \sum_{i \in I_j'} a_i - \sum_{i \in I_j} a_i \right| < \varepsilon_j$.

Pri izbranem $\varepsilon > 0$ lahko najdemo končno množico $K \subseteq J$, da $\bigcup_{j \in K} I_j' \supseteq L$.

in je

$$\sum_{j \in K} \Big(\sum_{i \in I_j} a_i \Big)_+ \geq \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I_j} a_i \Big)_+ - \varepsilon$$

ter

$$\sum_{j \in K} \Big(\sum_{i \in I_j} a_i \Big)_- \geq \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I_j} a_i \Big)_- - \varepsilon$$

Iz izbire I_j' sledi naslednje, da je

$$\sum_{j\in K}\Big(\sum_{i\in I_j'} a_i\Big)_+ \geq \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)_+ - 2\varepsilon$$

in

$$\sum_{j\in K}\Big(\sum_{i\in I_j'} a_i\Big)_- \geq \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)_- - 2\varepsilon .$$

Sledi, da je

$$\Bigg| \sum_{j\in K}\Big(\sum_{i\in I_j'} a_i\Big)_+ - \sum_{j\in K}\Big(\sum_{i\in I_j'} a_i\Big)_- - \Big(\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)_+ - \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)_-\Big)\Bigg|$$

$$\leq 4\varepsilon.$$

Ampak prva vsota je $\sum_{i\in \bigcup_{j\in K} I_j'} a_i$

in po izbiri je $\bigcup_{j\in K} I_j' \supseteq L$. Torej je

$$\Big| \sum_{i\in I} a_i - \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)\Big| \leq 6\varepsilon.$$

Ker je bil $\varepsilon>0$ poljuben, trditev sledi.

<u>Primer</u>: Naj bo $I = A \times B$, kjer sta A in B štetni. Definiramo $I_b = \{(a,b) : a \in A\}$. $\{I_b\}_{b \in B}$ je particija I. Velja, da obstajata vsoti $\sum_{i \in I} a_i$ in $\sum_{b \in B} \left(\sum_{i \in I_b} a_i \right)$ hkrati in sta, če obstajata, enaki.

<u>Primer</u>: Naj bo $\underline{X}$ diskreten slučajni vektor z vrednostmi $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots\}$ in $f : \{\underline{x}_1, \underline{x}_2 \ldots\} \to \mathbb{R}$. Označimo zalogo vrednosti f z $\{y_1, y_2, \ldots\}$. In naj bo $I_y = \{\underline{x}_k : f(\underline{x}_k) = y_k\}$. $\{I_{y_k}\}_{y_k \in \{y_1, \ldots\}}$ je particija $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n, \ldots\}$.

Vsoti

$$\sum_{\underline{x} \in \{\underline{x}_1, \ldots\}} f(\underline{x}) \cdot P(\underline{X} = \underline{x}) \qquad \text{in}$$

$$\sum_{y \in \{y_1, \ldots\}} \left(\sum_{\underline{x} \in I_y} f(\underline{x})\, P(\underline{X} = \underline{x}) \right)$$

$$= \sum_{y \in \{y_1, \ldots\}} y \left(\sum_{x \in I_y} P(\underline{X} = \underline{x}) \right)$$

$$= \sum_{y \in \{y_1 \ldots\}} y \cdot P(Y = y)$$

Izrek 3.2: Naj bosta X, Y diskretni slučajni spremenljivki in privzemimo, da $E(X)$ in $E(Y)$ obstajata. Potem obstaja tudi $E(Z)$ za $Z = \alpha X + \beta Y$ in velja

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Opomba: Lastnosti rečemo linearnost pričakovane vrednosti.

Dokaz: V resnici smo trditev že dokazali, razen obstoja. Za matematično neoporečen dokaz pa moramo utemeljiti razne zamenjave v vrstnem redu seštevanja. Vendar vse sledi-navarnost iz Leme A.4.

Opomba: Jasno sledi, da je

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k)$$

Izrek 3.3: Naj bo $\underline{X}$ slučajni vektor v $\mathbb{R}^n$ in $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Če je $Y = f(\underline{X})$ in obstaja vsota $\sum_{\underline{x}} |f(\underline{x})| \cdot P(\underline{X} = \underline{x})$ obstaja tudi $E(Y)$ in velja

$$E(Y) = \sum_{\underline{x}} f(\underline{x}) \cdot P(\underline{X} = \underline{x})$$

Dokaz: Po lemi A.4. vsoti $\sum_y y P(Y=y)$ in $\sum_{\underline{x}} f(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x})$ obstajata hkrati. Računamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{\underline{x}} f(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x}) \\
&= \sum_y \sum_{\underline{x} : f(\underline{x}) = y} f(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x}) \\
&= \sum_y y \cdot \sum_{\underline{x} : f(\underline{x}) = y} P(\underline{X} = \underline{x}) \\
&= \sum_y y \cdot P(Y = y)
\end{aligned}$$

Metoda indikatorjev

Definicija: Slučajna spremenljivka I z vrednostmi v $\{0,1\}$ se imenuje indikator ali Bernoullijeva slučajna spremenljivka. Če je $P(I=1)=p$ označimo: $I \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Opomba: Formalno je $I : \Omega \to \{0,1\}$. Vsakemu indikatorju pripada množica $I^{-1}(\{1\})$, ki je dogodek. Indikatorji in dogodki si bijektivno odgovarjajo. Za indikator, ki je 1 na dogodku A in 0 na A^c, uporabljamo oznaki I_A ali 1_A.

Če je $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, je

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1)$$

$$= p.$$

<u>Primer</u>: V posodi imamo B belih in R rdečih kroglic. Naključno izberemo n kroglic in naj bo X število belih kroglic med njimi. Vemo, da je $X \sim \text{HiperGeom}(n, B, N)$ z $N = B + R$. Lahko si predstavljamo, da kroglice izbiramo eno po eno, tako da so vedno vse kroglice enako verjetne. Definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{če je } k\text{-ta kroglica bela.} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ in posledično

$$E(X) = E(I_1) + \dots + E(I_n)$$

Velja $I_1 \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{B}{N}\right)$. Zaradi simetrije je tudi $I_k \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{B}{N}\right)$ za $k = 1, 2, \dots, n$. Razlaga: preden se dotaknemo škatle, lahko postavimo vprašanje: nekoč v prihodnosti bomo izbrali k-to kroglico. Ta je lahko katerakoli. Imajo vse enako verjetnost? Imajo!

Sledi

$$E(X) = n \cdot E(I_1) = n \cdot \frac{B}{N}.$$

<u>Primer</u>: Vrnimo se k ploščicam. Namesto slučajne spremenljivke X in njene porazdelitve lahko gledamo prispevke posameznih ploščic.

1	2	3	4	1	2						
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{B}$	$\boxed{D}$	$\boxed{S}$	$\boxed{S}$	$\boxed{S}$	$\boxed{S}$

Če za vsako od ploščic s števkami vemo koliko je prispevala k končnemu izplačilu, vemo X.

Označimo

$$I_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \overset{i}{\boxed{1}} \text{ prispevala } 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$I_{i,2} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \overset{i}{\boxed{1}} \text{ prispevala } 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$J_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \overset{i}{\boxed{2}} \text{ prispevala } 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$J_{i,2} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \overset{i}{\boxed{2}} \text{ prispevala } 4; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$K_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \boxed{3} \text{ prispevala } 3; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$K_{i,2} = \begin{cases} 1, & \text{če je ploščica } \boxed{3} \text{ prispevala } 6; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

S temi oznakami je

$$X = \sum_{i=1}^{4} (I_{i,1} + 2 \cdot I_{i,2})$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (2 \cdot J_{i,1} + 4 \cdot J_{i,2})$$

$$+ 3 \cdot K_{1,1} + 6 \cdot K_{1,2}$$

Uporabimo linearnost pričakovane vrednosti in dobimo

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} (E(I_{i,1}) + 2 E(I_{i,2}))$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (2 \cdot E(J_{i,1}) + 4 \cdot E(J_{i,2}))$$

$$+ 3E(K_{1,1}) + 6E(K_{1,2})$$

Zaradi simetrije je porazdelitev vseh $I_{i,1}$, $J_{i,1}$, $K_{1,1}$ in $I_{i,2}$, $J_{i,2}$ in $K_{1,2}$ enaka.

Pričakovana vrednost se poenostavi v

$$E(X) = 11 \cdot E(I_{1,1}) + 22 \cdot E(I_{1,2})$$

Potrebujemo

$$P(I_{1,1} = 1)$$

$$= P(\overset{1}{\boxed{1}} \text{ se je pojavila pred prvim } \boxed{S}, \ \boxed{D} \text{ pa ne})$$

Če pobrišemo ploščice, ki niso $\overset{1}{\boxed{1}}$, $\boxed{D}$ ali $\boxed{S}$ nam ostane 6 ploščic v naključnem vrstnem redu (inducirana permutacija). Sledi

$$P(I_{1,1} = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{15}.$$

Podobno je

$$P(I_{1,2} = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Konečno je

$$E(X) = 11 \cdot \frac{2}{15} + 22 \cdot \frac{1}{15}$$

$$= \frac{44}{15} \doteq 2.93$$

3.3. Večrazsežne zvezne porazdelitve

Slučajna spremenljivka X ima zvezno porazdelitev, če je

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx .$$

V $\mathbb{R}^n$ bi bili analogija intervalov kvadri, vendar je to preveč omejujoče. Če hočemo dobro definicijo, se moramo omejiti na množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$, na katerih lahko definiramo Riemannov integral v smislu Analize 2. To so množice, ki imajo prostornino v Jordanovem smislu.

<u>Definicija</u>: Slučajni vektor $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ ima zvezno porazdelitev, če obstaja nenegativna funkcija $f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je

$$P(\underline{X} \in A) = \int_A f_{\underline{X}}(\underline{x})\,dx$$

za vsako množico A, po kateri lahko definiramo Riemannov integral (lahko v izlimitiranem smislu) funkcije $f_{\underline{X}}$, za katero predpostavljamo, da je tudi Riemannovo integrabilna za vsak tak A. Funkciji $f_{\underline{X}}$ rečemo gostota $\underline{X}$.

Opombe:

(i) Iz definicij sledi, da je s $f_{\underline{X}}$ popolnoma določena porazdelitev $\underline{X}$. Rekli smo, da je porazdelitev $\underline{X}$ opisana z $P(\underline{X} \in U)$ za vse odprte množice U. Ker so odprti kvadri množice, po katerih lahko integriramo, je s tem natanko določena porazdelitev.

(ii) Če imamo $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$ lahko pišemo $f_{X,Y}(x,y)$ ali $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$.

(iii) V verjetnosti bomo pisali $\int_{\mathbb{R}^2}$ namesto $\iint_{\mathbb{R}^2}$, oznaka

$\int_A f_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x}$ pa bo pomenila

$\iint\limits_A \cdots \int f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$

v jeziku Analize 2.

Primeri:

(i) Naj bo

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

za $|\rho| < 1$. Preverimo, da je $f_{X,Y}(x,y)$ gostota.

Nenegativna je, zato moramo preveriti še

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Računamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\,dy$$

$$= (*)$$

Opazimo: $\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x^2}{2}$

$$* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \cdot$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\,dy}_{1, \text{ ker je to integral } N(\rho x,\, 1-\rho^2) \text{ gostote}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= 1.$$

(ii) Naj bo

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Izračunajmo $P(X \geq 0, Y \geq 0)$.

Računamo

$$P(X \geq 0, Y \geq 0)$$

$$= \int_{x>0, y>0} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty dx \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-x^2/2} dy$$

$$= (*)$$

V notranjem integralu uvedemo novo spremenljivko: $\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} = u$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-\rho^2}} = du$$

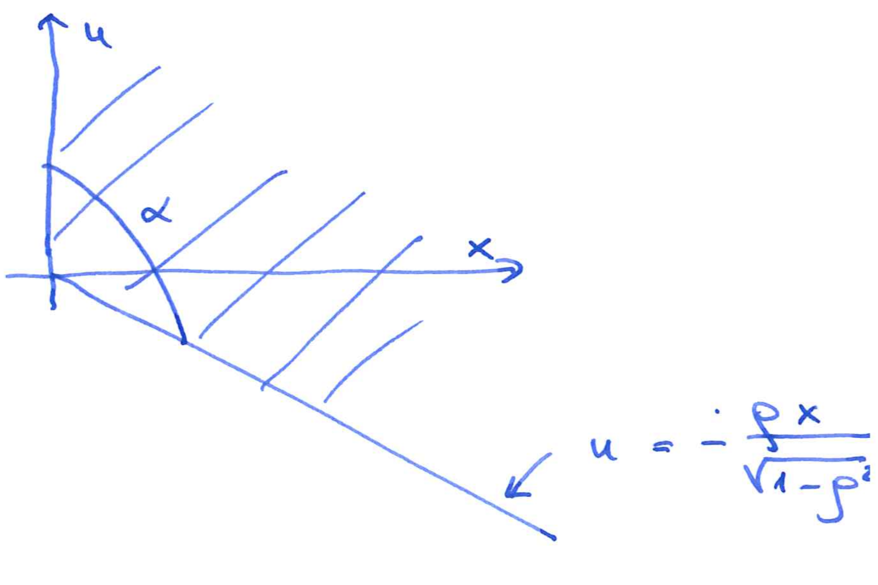
$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{-\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

Fubini

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{x>0 \\ u > -\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}}} e^{-\frac{x^2+u^2}{2}} dx\, du$$

Funkcija $f(x,u) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+u^2}{2}}$ je rotacijsko simetrična in se integrira v 1. Območje, po katerem integriramo, je oblike

Slika:



Integral je sorazmeren kotu α, torej je enak $\frac{\alpha}{2\pi}$, pri čemer je $\alpha = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$.

Sledi

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

(iii) Naj bo $\underline{\Sigma}$ simetrična, pozitivno definitna matrika. Naj bo za $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \times$$

$$\times \; e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\Sigma}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$$

za $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$. Očitno je $f_{\underline{X}}(\underline{x}) \geq 0$.

Računamo z uvedbo nove spremenljivke. Zapišemo lahko

$$\underline{\Sigma} = \underline{Q}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\underline{Q}^T,$$ kjer

je $\underline{Q}$ ortogonalna matrika. Potem

je $\underline{\Sigma}^{-1} = \underline{Q}\,\mathrm{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)\underline{Q}^T$

Nova spremenljivka: $\underline{y} = \underline{Q}^T(\underline{x}-\underline{\mu})$

Velja $J(\underline{y}) = 1$, ker je $\underline{Q}$ ortogonalna.

Sledi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1}+\dots+\frac{y_n^2}{\lambda_n}\right)} dy_1 \dots dy_n$$

Fubini

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_k}} e^{-y_k^2/2\lambda_k} dy_k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \cdot \sqrt{\det \underline{\Sigma}}$$

$$= 1.$$

<u>Definicija</u>: Rečemo, da ima vektor $\underline{X}$ z gostoto $f_{\underline{X}}$ večrazsežno normalno gostoto s parametroma $\underline{\mu}$ in $\underline{\Sigma}$. Oznaka: $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Kako iz gostote $f_{X,Y}(x,y)$ najdemo gostoto X ali Y? Ali ta obstaja? Računamo

$$P(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_{[a,b] \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

Notranji integral je integral s parametrom x, torej funkcija x. Načeloma ne vemo, da je

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

Riemann-integrabilna, bomo pa to privzeli. Potem sledi

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx.$$

Izrek 3.4: Naj bo $f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gostota slučajnega vektorja $\underline{X}$ in naj bo $m < n$. Privzemimo, da je funkcija

$$(x_1, \ldots, x_m) \xmapsto{f_{X'}} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} f_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{m+1} \cdots dx_n$$

Riemannovo integrabilna (lahko tudi v izlimitiranem smislu) po vsaki množici $A \subseteq \mathbb{R}^m$, po kateri se da integrirati. Označimo $\underline{X}' = (X_1, \ldots, X_m)$. Potem je $f_{X'}$ gostota $\underline{X}'$.

Dokaz: Dokaz je povsem enak kot v dveh dimenzijah.

Primer:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$|\rho| < 1$.

Računamo

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{x^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} dy}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

<u>Sklep</u>: $X \sim N(0,1)$.

<u>Opomba</u>: Po analogiji z diskretnim primerom bomo gostoti $f_{\underline{X}'}(\underline{x}')$ rekli robna gostota.

Lotiti se moramo še koncepta neodvisnosti za zvezne porazdelitve.

V splošnem smo definirali, da sta X, Y neodvisni, če velja

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

Vzemimo $A = [a,b]$, $B = [c,d]$.
Potem po definiciji velja

$$P(X \in [a,b], Y \in [c,d])$$

$$= \int_{[a,b]\times[c,d]} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Po drugi strani je

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$P(Y \in [c,d]) = \int_a^b f_Y(y)\,dy.$$

Po Fubiniju je torej

$$P(X \in [a,b])\, P(Y \in [c,d])$$

$$= \int_{[a,b]\times[c,d]} f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy.$$

Če sta X, Y neodvisni, bo za vsak pravokotnik $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ veljalo

$$\int_Q f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_Q f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy.$$

Analiza 2 nam pove, da morata biti funkciji $f_{X,Y}(x,y)$ in $f_X(x) f_Y(y)$ enaki, razen morda na množici z mero 0. Obratno tudi velja, da sta v primeru, ko je $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ slučajni spremenljivki neodvisni. Razmislek je povsem enak v več dimenzijah. Strnimo ugotovitve v izrek.

Izrek 3.5: Slučajna vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ naj imata gostoto $f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})$. Vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$ sta neodvisna, če in samo če je

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{x})\, f_{\underline{Y}}(\underline{y})$$

razen morda na množici z mero 0.

Dokaz: Smo že.

Primer:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Vemo, da je $X \sim N(0,1)$ in $Y \sim N(0,1)$, torej je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}$$

Če je $\rho \neq 0$, je

$$f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0)\cdot f_Y(0)$$

ker sta leva in desna stran zvezni, je $f_{X,Y}(x,y) > f_X(x) \cdot f_Y(y)$ za nek Q, ki vsebuje $(0,0)$, zato X in Y nista neodvisni. Za $\rho = 0$ pa neodvisnost očitno velja.

<u>Izrek 3.6</u>: Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če in samo če je za skoraj vse $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{X,Y}(x,y) = f(x)\, g(y)$$

za funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>Dokaz</u>: V eno smer trditev sledi iz Izreka 3.5. Po formulah za robno gostoto je

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy \\ &= c_1 \cdot f(x) \end{aligned}$$

Podobno je $f_Y(y) = c_2\, g(y)$.

Velja torej

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{c_1 \cdot c_2} f_X(x)\, f_Y(y)$$

Manjka še $c_1 \cdot c_2 = 1$. Obe strani integriramo po $\mathbb{R}^2$ in upoštevamo Fubinijev izrek.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{c_1 \cdot c_2} \int_{\mathbb{R}^2} f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{c_1 c_2} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{c_1 \cdot c_2} . \quad 1 \quad \cdot \quad 1 .$$

Trditev sledi.

<u>Opomba</u>: Trditev velja v povsem enaki obliki za vektorja $\underline{X}$ in $\underline{Y}$.

Problem gladiatorjev

Predpostavljamo, da imamo dve skupini gladiatorjev z m in n borci. Njihove moči so $s_1, s_2, \ldots, s_m$ in $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Predpostavljamo, da v borbi dveh gladiatorjev z močema s in t zmaga prvi z verjetnostjo $s/(s+t)$ in drugi z verjetnostjo $t/(s+t)$. Predpostavljamo tudi, da so izidi posameznih spopadov neodvisni. Zmaga moštvo, ki eliminira vse nasprotnikove gladiatorje. Predpostavljajmo najprej, da obe moštvi pošiljata gladiatorje v boj v takem vrstnem redu, kot so oštevilčeni. Definirajmo

$$F_{m,n}(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) = P(\{\text{zmaga prvo moštvo}\})\,.$$

Kot smo videli, je ta funkcija že za majhne vrednosti m in n zapletena. Iz formule za popolno verjetnost in predpostavke o neodvisnosti izidov posameznih spopadov sledi, da je

$$\begin{aligned} F_{m,n}\,(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) &= \\ = \ \frac{s_1}{s_1+t_1} &\cdot F_{m,n-1}(s_1, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_n) \\ &+ \frac{t_1}{s_1+t_1} \cdot F_{m-1,n}(s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Veljata tudi robna pogoja

$$F_{1,n}(s_1; t_1, \ldots, t_n) = \frac{s_1}{s_1+t_1} \cdot \frac{s_1}{s_1+t_2} \cdots \frac{s_1}{s_1+t_n}$$

in

$$F_{m,1}(s_1, \ldots, s_m; t_1) = 1 - \frac{t_1}{s_1+t_1} \cdot \frac{t_1}{s_2+t_1} \cdots \frac{t_1}{s_m+t_1}\,.$$

Rakurzijske enačbe (1) in robni pogoji enolično določajo funkcijo $F_{m,n}$. V nadaljevanju bomo z uporabo zveznih porazdelitev pokazali, da je funkcija $F_{m,n}$ simetrična v argumentih $s_1, \ldots, s_m$ in $t_1, \ldots, t_n$. Iz tega izhaja, da ne obstaja strategija, s katero bi eno ali drugo moštvo lahko povečalo verjetnost za zmago. Torej ne obstaja optimalna izbira vrstnega reda, po katerem bi gladiatorje pošiljali v boj.

Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke. Prepostavljamo, da je $X \sim \exp(\lambda)$ in je $Z \geq 0$. Računamo z uporabo Fubinijevega izreka

$$\begin{aligned}
&P\left(X \geq Y+Z, X \geq Z\right) = \\
&\quad = \int_{x \geq y+z, x \geq z} f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) dx dy dz \\
&\quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{x \geq z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
&\qquad\qquad + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{x \geq y+z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
&\quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \\
&\qquad\qquad + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{y+z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda(y+z)} dz \\
&\quad = \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) e^{-\lambda y} dy \right).
\end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
P(X \geq Z) &= \int_{x \geq z} f_X(x) f_Z(z) dx dz \\
&= \int_{0}^{\infty} f_Z(z) dz \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_{0}^{\infty} f_Z(z) e^{-\lambda z} dz
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
P(X \geq Y) &= \int_{x \geq y} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) dy \int_{y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_Y(y) dy + \int_{0}^{\infty} f_Y(y) e^{-\lambda y} dy \,.
\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$P(X \geq Y + Z, X \geq Z) = P(X \geq Y)P(X \geq Z)\,. \tag{2}$$

Iz te enakosti izpeljemo

$$\begin{aligned} P(X < Y + Z, X \geq Z) &= P(X \geq Z) - P(X \geq Y + Z, X \geq Z) \qquad (3) \\ &= P(X \geq Z) - P(X \geq Y)P(X \geq Z) \\ &= P(X \geq Z)(1 - P(X \geq Z)) \\ &= P(X < Y)P(X \geq Z)\,. \end{aligned}$$

Naj bodo $X_1, \ldots, X_m$ in $Y_1, \ldots, Y_n$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_i, Y_j \sim \exp(1)$. Definirajmo funkcijo

$$G_{m,n}(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_n) = P(s_1 X_1 + \cdots + s_m X_m \geq t_1 Y_1 + \cdots + t_n Y_n)\,.$$

Iz definicije izhaja, da je funkcija $G_{m,n}$ simetrična v prvih m argumentih in v drugih n argumentih. Definirajmo

$$A = \{s_1 X_1 + \cdots + s_m X_m \geq t_1 Y_1 + \cdots + t_n Y_n\}\,.$$

Zapišemo lahko

$$P(A) = P(A \cap \{s_1 X_1 \geq t_1 Y_1\}) + P(A \cap \{t_1 Y_1 > s_1 X_1\})\,. \tag{4}$$

Oglejmo si prvi člen v vsoti. Prepišemo ga lahko v

$$\begin{aligned} &P(A \cap \{s_1 X_1 \geq t_1 Y_1\}) = \\ &= P\left(s_1 X_1 \geq t_1 Y_1 + \cdots + t_n Y_n - s_2 X_2 - \cdots - s_m X_m, s_1 X_1 \geq t_1 Y_1\right) \\ &= P\left(s_1 X_1 \geq t_2 Y_2 + \cdots + t_n Y_n - s_2 X_2 + \cdots + s_m X_m\right) P\left(s_1 X_1 \geq t_1 Y_1\right) \\ &= P\left(s_1 X_1 + \cdots + s_m X_m \geq t_2 Y_2 + \cdots + t_n Y_n\right) P\left(s_1 Y_1 \geq t_1 X_1\right)\,. \end{aligned}$$

Pri tem smo vloge v (2) porazdelili tako, da je $X = s_1 X_1$, $Z = t_1 Y_1$ in $Y = t_2 Y_2 + \cdots + t_n Y_n - s_2 X_2 + \cdots + s_m X_m$. Zlahka preverimo, da je

$$P\left(s_1 X_1 \geq t_1 Y_1\right) = \frac{s_1}{s_1 + t_1}\,,$$

tako da je prvi člen enak

$$\frac{s_1}{s_1+t_1} \cdot G_{m,n-1}(s_1,\ldots,s_m;t_2,\ldots,t_n)\,.$$

Iz enakosti (3) sledi za drugi člen

$$\begin{aligned}
&P(A \cap \{t_1Y_1 > s_1X_1\}) = \\
&\quad = \quad P(t_1Y_1 < s_1X_1 + s_2Y_2 + \cdots + s_mX_m - t_2Y_2 - \cdots - t_nY_n, t_1Y_1 > s_1X_1) \\
&\quad = \quad P\left(t_1Y_1 < s_2Y_2 + \cdots + s_mX_m - t_2Y_2 - \cdots - t_nY_n\right) P(t_1Y_1 > s_1X_1) \\
&\quad = \quad P\left(s_2X_2 + \ldots + s_mX_m > t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n\right) P(t_1Y_1 > s_1X_1)
\end{aligned}$$

V tem primeru je bila porazdelitev vlog v (3) naslednja: $X = t_1Y_1$, $Y = s_2Y_2 + \cdots + s_mX_m - t_2Y_2 - \cdots - t_nY_n$ in $Z = s_1X_1$. Drugi člen v (4) je torej enak

$$\frac{t_1}{s_1+t_1} \cdot G_{m-1,n}(s_2,\ldots,s_m;t_1,\ldots,t_n)\,.$$

Funkcija $G_{m,n}$ ustreza natanko pravim rekurzijskim enačbam (1), kot verjetnosti $F_{m,n}$ v problemu gladiatorjev. Preveriti je treba le še, da ustreza tudi robnim pogojem. Po enakosti (2) za $m = 1$ sledi

$$\begin{aligned}
&P\left(s_1X_1 \geq t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n\right) = \\
&\quad = \quad P\left(s_1X_1 \geq t_1Y_1 + \cdots + t_nY_n, s_1X_1 \geq t_1Y_1\right) \\
&\quad = \quad P\left(s_1X_1 \geq t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n\right) P(s_1X_1 \geq t_1Y_1) \\
&\quad = \quad \frac{s_1}{s_1+t_1} \cdot P\left(s_1X_1 \geq t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n\right)\,.
\end{aligned}$$

Z ponavljanjem dobimo pravi robni pogoj. Na enak način preverimo še to, da dobimo prave robne pogoje za $n = 1$. Sledi, da je $F_{m,n} = G_{m,n}$.

Primer: Za $m = 2$ in $n = 3$ lahko iz rekurzijske formule izračunamo

$$F_{2,3}(s_1, s_2; t_1, t_2, t_3)$$

$$= \left\{ \frac{s_1^4}{(s_1+t_1)(s_1+t_2)(s_1+t_3)} - \frac{s_2^4}{(s_2+t_1)(s_2+t_2)(s_2+t_3)} \right\} \Big/ (s_1 - s_2)$$

$F_{2,3}$ je simetrična v s_1, s_2 in t_1, t_2, t_3!

3.4. Funkcije slučajnih vektorjev

Če je $\underline{X}$ slučajni vektor v $\mathbb{R}^n$ in je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, je tudi $\underline{Y} = f(\underline{X})$ slučajni vektor. Kako lahko najdemo njegovo gostoto?

- V diskretnem primeru nas bodo zanimale samo vsote, pa še te samo za celoštevilske slučajne vektorje. Če sta X in Y celoštevilski in je $Z = X + Y$, je

$$P(Z = n) = P\Big(\bigcup_{\substack{k,l \\ k+l=n}} \underbrace{\{X = k, Y = l\}}_{\text{disjunktni dog.}}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{k,l \\ k+l=n}} P(X = k, Y = l)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k, Y = n-k)$$

Povzamemo: za $Z = X + Y$ je

$$\boxed{P(Z=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k, Y=n-k)}$$

Opomba: če sta X, Y nenegativni, je

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

Primer: Naj bosta X, Y neodvisni z $X \sim Po(\lambda)$ in $Y \sim Po(\mu)$. Naj bo $Z = X + Y$. Velja

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) \\
(\text{neodv.}) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}$$

Sklep: $Z = X + Y \sim Po(\lambda+\mu)$

<u>Primer</u>: Naj bosta X, Y neodvisni z

$$P(X=k) = \frac{\beta^a (a)_k}{k! (1+\beta)^{a+k}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$P(Y=l) = \frac{\beta^b (b)_l}{l! (1+\beta)^{b+l}}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Pri tem je $\beta, a, b > 0$ in

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

Pochhammerjev simbol. Naj bo $Z = X + Y$. Porazdelitev Z?

Računamo

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

$$(\text{neodv.}) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^{a+b}\,(a)_k\,(b)_{n-k}}{k!\,(n-k)!\,(1+\beta)^{a+b+n}}$$

$$= \frac{\beta^{a+b}}{n!\,(1+\beta)^{a+b+n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}$$

Kaj je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}$?

Spomnimo se na Eulerjevo zvezo

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

kjer je za $p,q>0$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Računamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+n-k)}{\Gamma(b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(a+k)\,\Gamma(b+n-k)}{\Gamma(a+b+n)}$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B(a+k,\, b+n-k)$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \int_0^1 x^{a+k-1} (1-x)^{b+n-k-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \times \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=(x+(1-x))^n = 1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} B(a,b)$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+b)} = (a+b)_n$$

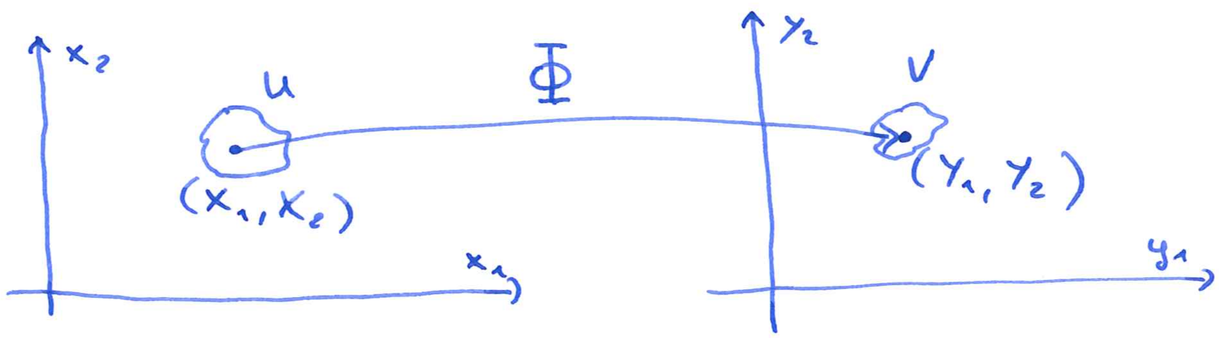
Sklep:

$$P(Z = n) = \frac{\beta^{a+b} (a+b)_n}{n! \, (1+\beta)^{a+b+n}} \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

Kaj pa, če je Z zvezni slučajni vektorji. Ideja je, da se omejimo na preslikave

$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ki so zvezno parcialno odvedljive in bijektivne.

Slika:



Izberimo si okolici U in V točk (x_1, x_2) in (y_1, y_2), pri čemer je $V = \Phi(U)$.

Vemo:

$$P(\underline{x} \in U) = \int_U f_{\underline{x}}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$P(\underline{Y} \in V) = \int_V f_Y(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

Če so okolice „majhne" in so gostote zvezne, je

$$P(\underline{x} \in \underline{U}) \approx f_{\underline{x}}(x_1, x_2)\, |U|$$

$$P(\underline{Y} \in V) \approx f_Y(y_1, y_2)\, |V|$$

Če je $\underline{\Phi}$ bijektivna, je

$P(\underline{x} \in U) = P(\underline{Y} \in V)$, zato je

$$f_{\underline{x}}(x_1, x_2)\, |U| \approx f_{\underline{Y}}(y_1, y_2)\, |V|$$

ali

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) \approx f_{\underline{x}}(x_1, x_2) \frac{|U|}{|V|}.$$

kateri količini bo blizu $\frac{|U|}{|V|}$?

Jacobijevi determinanti preslikave $\underline{\Phi}^{-1}$. To nas navede na formulo

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) = f_{\underline{X}}(x_1, x_2) \left| J_{\underline{\Phi}^{-1}}(y_1, y_2) \right|,$$

pri čemer je $(y_1, y_2) = \underline{\Phi}(x_1, x_2)$.

<u>Izrek 3.7</u>: Naj bo $\underline{X}$ slučajen vektor z $P(\underline{X} \in U) = 1$ za neko odprto množico $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $\underline{\Phi}$ bijektivna preslikava med U in odprto množico $V \subseteq \mathbb{R}^n$, taka da sta $\underline{\Phi}$ in $\underline{\Phi}^{-1}$ zvezno parcialno odvedljivi. Gostoto vektorja $\underline{Y} = \underline{\Phi}(\underline{X})$ za $\underline{x} \in V$ dobimo po formuli

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{\Phi}^{-1}(\underline{y})) \left| J_{\underline{\Phi}^{-1}}(\underline{y}) \right|.$$

Zunaj V je gostota $\underline{Y}$ enaka 0.

<u>Opomba</u>: Formula se imenuje transformacijska formula. Dokaz temelji na formuli za uvedbo nove spremenljivke v mnogoterni integral.

<u>Dokaz</u>: Očitno je $P(\underline{Y} \in V) = 1$.

Naj bo $B \subseteq V$. Računamo

$$P(\underline{Y} \in B) = P(\underline{X} \in \Phi^{-1}(B))$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(B)} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= (*)$$

Nova spremenljivka: $\underline{x} = \Phi^{-1}(y)$

z $d\underline{x} = |J_{\Phi^{-1}}(y)|\, dy$

$$(*) = \int_B f_{\underline{X}}(\Phi^{-1}(y))\, |J_{\Phi^{-1}}(y)|\, dy$$

V zadnji vrsti smo uporabili formulo za uvedbo nove spremenljivke. Trditev je s tem dokazana.

Primer: Naj bosta X_1, X_2 neodvisni z $X_1 \sim \Gamma(a, \lambda)$ in $X_2 \sim \Gamma(b, \lambda)$. Definirajmo

$$\Phi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \; x_1 + x_2 \right)$$

Preslikava bijektivno preslika $(0,\infty)^2$ na $(0,1) \times (0,\infty)$ in velja $P((X_1, X_2) \in (0,\infty)^2) = 1$. Za izračun $\Phi^{-1}(y_1, y_2)$ moramo rešiti enačbi

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} = y_1 \quad \text{in} \quad x_1 + x_2 = y_2 .$$

Zlahka dobimo

$$x_1 = y_1 \cdot y_2 \, , \quad x_2 = y_2 (1 - y_1)$$

Sledi

$$\Phi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 y_2, y_2(1-y_1))$$

in

$$J\Phi^{-1}(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{pmatrix}$$

$$= y_2$$

Gostota (X_1, X_2) je zaradi neodvisnosti enaka produktu gostot, torej

$$f_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_1^{a-1} e^{-\lambda x_1} \cdot x_2^{b-1} e^{-\lambda x_2}$$

Sledi

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (y_1 y_2)^{a-1} \cdot e^{-\lambda y_1 y_2} \cdot [y_2(1-y_1)]^{b-1} e^{-\lambda y_2(1-y_1)} \cdot y_2$$

Pospravimo in dobimo

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) =$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \, y_1^{a-1} (1-y_1)^{b-1}$$

$$\times \; y_2^{a+b-1} \cdot e^{-\lambda y_2}$$

<u>Sklepi</u>!

(i) Y_1, Y_2 sta neodvisni po izreku 3.6., ker je desna stran produkt faktorja, ki je odvisen od y_1 in faktorja, ki je odvisen od y_2.

(ii) Faktorja sta sorazmerna z gostotami, zato je

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{B(a,b)} \, y_1^{a-1} (1-y)^{b-1}$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} \, y_2^{a+b-1} e^{-\lambda y_2}$$

Med drugim to pomeni

$$\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\lambda^{a+b}}{B(a,b)\,\Gamma(a+b)},$$

kar je Eulerjeva zveza za funkciji Γ in B!

(iii) Vsota $Y_1 + Y_2 \sim \Gamma(a+b, \lambda)$.

Torej vsota neodvisnih gama porazdeljenih slučajnih spr. z enakim drugim parametrom je Γ - porazdeljena. Torej: če sta Y_1, Y_2 neodvisni in je $Y_1 \sim \Gamma(a, \lambda)$, $Y_2 \sim \Gamma(b, \lambda)$, je $Y_1 + Y_2 \sim \Gamma(a+b, \lambda)$.

Primer: Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne in $X_k \sim N(0,1)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Naj bo $\underline{A}$ obrnljiva $n \times n$ matrika. Definirajmo

$$\underline{Y} = \underline{A}\,\underline{X} + \underline{\mu} \quad \text{za} \quad \mu \in \mathbb{R}^n.$$

Preslikava $\underline{\Phi}(\underline{x}) = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{\mu}$ je bijektivna in linearna. Velja

$$\underline{\Phi}^{-1}(y) = \underline{A}^{-1}(y - \underline{\mu}) \quad \text{in}$$

$$J_{\underline{\Phi}^{-1}}(y) = \det(\underline{A}^{-1})$$

Sledi

$$f_{\underline{Y}}(y) = f_{\underline{X}}(\underline{\Phi}^{-1}(y))\,|\det(\underline{A}^{-1})|$$

A zaradi neodvisnosti je

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{x}}$$

Nadaljujemo

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\det(\underline{A})|} \times$$

$$\times\; e^{-\frac{1}{2}[\underline{A}^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})]^T[\underline{A}^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})]}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\det(\underline{A})|} \times$$

$$\times\; e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{\mu})^T(\underline{A}^{-1})^T\underline{A}^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\det \underline{A}|} \times$$

$$\times\; e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{\mu})(\underline{A}\cdot\underline{A}^T)^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})}$$

Označimo : $\underline{A}\,\underline{A}^T = \underline{\Sigma}$. Velja

$$\sqrt{\det \underline{\Sigma}} = |\det \underline{A}|$$

S to oznako je

$$f_{\underline{Y}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \times e^{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \underline{\Sigma}^{-1}(y-\mu)}$$

<u>Sklep</u>: $Y \sim N(\mu, \underline{\Sigma})$, kjer je $\underline{\Sigma} = \underline{A} \cdot \underline{A}^T$.

<u>Primer</u>: Naj imata X, Y gostoto $f_{X,Y}(x,y)$. Naj bo $Z = X + Y$. Gostota Z? Definiramo

$$\underline{\Phi}(x,y) = (x, x+y).$$

$\underline{\Phi}$ je bijektivna in linearna z $J\underline{\Phi}(x,y) = 1$. Iz transformacijske formule sledi

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, z-x).$$

Gostoto Z dobimo kot robno gostoto, torej

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx.}$$

Če sta X, Y neodvisni, se formula pretvori v

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx,$$

kar poznamo kot <u>konvolucijo</u> gostot f_X in f_Y.

<u>Primer</u>: Naj bosta X, Y neodvisni z $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in $Y \sim N(\nu, \tau^2)$. Gostota $Z = X+Y$?

Privzemimo najprej $\mu = \nu = 0$ in $\sigma^2 + \tau^2 = 1$. Računamo

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\tau^2}}\, dx$$

$$= (*)$$

Eksponente preuredimo v

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{(z-x)^2}{2\tau^2}$$

$$= \frac{x^2\tau^2 + (z-x)^2\sigma^2}{2\sigma^2\tau^2}$$

$$= \frac{x^2(\sigma^2+\tau^2) + z^2\sigma^2 - 2xz\sigma^2}{2\sigma^2\tau^2}$$

$$= \frac{(x-\sigma^2 z)^2 - \sigma^4 z^2 + z^2\sigma^2}{2\sigma^2\tau^2}$$

$$= \frac{(x-\sigma^2 z)^2}{2\sigma^2\tau^2} + \frac{\sigma^2 z^2(1-\sigma^2)}{2\sigma^2\tau^2}$$

$$= \frac{(x-\sigma^2 z)^2}{2\sigma^2\tau^2} + \frac{z^2}{2}$$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \times$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\cdot\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\sigma^2 z)^2}{2\sigma^2\tau^2}}\,dx}$$

= 1, ker je integral gostote $N(\sigma^2 z, \sigma^2\tau^2)$ porazdelitve

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

<u>Sklep</u>: $Z \sim N(0,1)$.

V splošnem zapišemo

$$Z = X + Y$$

$$= \sqrt{\sigma^2+\tau^2}\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}}_{X'} + \underbrace{\frac{Y-\nu}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}}_{Y'}\right) + \mu + \nu$$

X', Y' sta neodvisni s parametri $0, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)^2$ in $0, \left(\frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)^2$.

Sledi $X' + Y' \sim N(0,1)$. Ampak

$X + Y$ je linearna funkcija $X' + Y'$.

Sledi $Z \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

Trditev velja tudi bolj splošno.

Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne

in normalno porazdeljene z

$X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, je linearna

kombinacija $Y = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k$

normalno porazdeljena s

parametri $\sum_{k=1}^{n} c_k \mu_k$ in

$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \sigma_k^2$.

<u>Primer</u>: Naj imata X, Y gostoto

$f_{X,Y}$ in naj bo $Z = \frac{Y}{X}$. Gostota

Z? Definirajmo

$$\Phi(x,y) = \left(x, \frac{y}{x}\right) \text{ na}$$

$$U = \{(x,y) : x \neq 0\}.$$

Velja $P((X,Y) \in U) = 1$, Φ pa je na U bijektivna in zvezno parcialno odvedljiva, ter velja $\Phi(U) = U$. Računamo

$$\Phi^{-1}(x,z) = (x, xz) \quad \text{in}$$

$$J_{\Phi^{-1}}(x,z) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix} = x .$$

Sledi

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, xz) \cdot |x|$$

Gostoto Z dobimo kot robno gostoto $f_{X,Z}$, torej je

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, xz) \cdot |x| \, dx}$$

<u>Primer</u>: Naj bosta X, Y neodvisni in $X, Y \sim N(0,1)$. Gostota $Z = Y/X$?

Velja

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, xz)\,|x|\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{-(xz)^2/2} \cdot |x|\,dx$$

(simetrija, sodost) $= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \cdot x\,dx$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-e^{-x^2/2\,(1+z^2)} \cdot \frac{1}{1+z^2} \right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi(1+z^2)} \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Opomba: Z ima Cauchyjevo gostoto.

Primer: Naj bo $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Porazdelitev $\underline{X}^{(1)} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$?

Načeloma lahko to izračunamo po formuli za robne porazdelitve, vendar se zalomi. Pišimo

$$\underline{X} = (\underline{X}^{(1)}, \underline{X}^{(2)}), \quad \underline{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$$

in $\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$. Definirajmo

$$\Phi(\underline{x}) = (\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{x}^{(1)})$$

Velja

$$D\Phi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{I}_m & 0 \\ -\underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11} & \underline{I}_{n-m} \end{pmatrix}, \text{ torej}$$

$J\Phi(\underline{x}) = 1$. Poleg tega je

$$\Phi^{-1}(y) = (y^{(1)}, y^{(2)} + \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1} y^{(1)}).$$

in $J\Phi^{-1}(y) = 1$.

Če sta $\underline{A}, \underline{B}$ matriki z $\underline{A}\underline{B} = I$ in pišemo

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix},$$

je
$$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} B_{21} = I \quad \text{in}$$
$$A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0.$$

Zaradi preprostosti privzemimo $\underline{\mu} = 0$. Izračunati bomo morali

$$[\Phi^{-1}(y)]^T \underline{\Sigma}^{-1} \Phi^{-1}(y),$$ kar v matrični obliki lahko prepišemo v

$$y^T \begin{pmatrix} \underline{I} & \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ \underline{0} & I \end{pmatrix} \underline{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{I} & 0 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

Računamo z oznako $\underline{A} = \Sigma^{-1}$

Iz

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} = \underline{I} \quad \text{sledi}$$

$$\underline{A}_{11} \underline{\Sigma}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{\Sigma}_{21} = \underline{I}$$

in

$$\underline{A}_{11} \underline{\Sigma}_{12} + \underline{A}_{12} \underline{\Sigma}_{22} = 0 .$$

$$\underline{A}_{21} \underline{\Sigma}_{11} + \underline{A}_{22} \underline{\Sigma}_{21} = 0$$

Računamo

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I} & 0 \\ \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} & \underline{I} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1}, & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1}, & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} , & \underline{A}_{12} \\ 0 & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Nadaljujemo

$$\begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \\ 0 & \underline{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} & \underline{A}_{12} \\ 0 & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} , & \underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} \\ -\text{"}- , & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Iz

$$\begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \underline{I} \quad \text{sledi}$$

$$\underline{\Sigma}_{11} \underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} = 0, \quad \text{torej je}$$

$$\underline{\Sigma}_{11} (\underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22}) = 0 .$$

Iz linearnih enačb sledi še

$$\underline{A}_{22} = (\underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12})^{-1}. \quad \text{(glej dodatek)}$$

Torej je

$$y^T \begin{pmatrix} \underline{I} & \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ 0 & \underline{I} \end{pmatrix} \underline{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{I} & 0 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & \underline{I} \end{pmatrix} y$$

$$= y^T \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (\underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{-1} \end{pmatrix} y$$

Sklep: kvadratna forma razpade, zato je $\underline{Y}^{(1)}$ neodvisen od $\underline{Y}^{(2)}$.

Gostota $\underline{Y}^{(1)}$

je sorazmerna izrazu

$$e^{-\frac{1}{2} y^T \underline{\Sigma}_{11}^{-1} y}.$$

To pomeni, da je $\underline{Y}^{(1)} \sim N(\underline{0}, \underline{\Sigma}_{11})$ in v splošnem $\underline{Y}^{(1)} \sim N(\underline{\mu}^{(1)}, \underline{\Sigma}_{11})$.

<u>Opomba</u>: Predpostavka je, da je $\underline{\Sigma}$ positivno definitna. Taka je potem tudi $\underline{\Sigma}_{11}$.

Podobno lahko izračunamo

$$\begin{pmatrix} \underline{I} & 0 \\ -\underline{\Sigma}_{12}\underline{\Sigma}_{11}^{-1} & \underline{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I} & -\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{\Sigma}_{21} \\ 0 & \underline{I} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & 0 \\ 0 & -\underline{\Sigma}_{12}\underline{\Sigma}_{11}\underline{\Sigma}_{21} + \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Ker je produkt matrik obrnljiv, je obrnljiva tudi matrika v spodnjem desnem kotu.

Bolj jasno: če velja

$$\begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_{11}, & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \underline{I},$$ je

$$\underline{\Sigma}_{11} \underline{A}_{11} + \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} = \underline{I}$$

$$\underline{\Sigma}_{11} \underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} = 0$$

$$\underline{\Sigma}_{21} \underline{A}_{11} + \underline{\Sigma}_{22} \underline{A}_{21} = 0$$

$$\underline{\Sigma}_{21} \underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{22} \underline{A}_{22} = \underline{I}.$$

To so 4 linearne enačbe za 4 neznanke. Zanima nas predvsem $\underline{A}_{22}$. Iz druge enačbe sledi z množenjem z $\underline{\Sigma}_{11}^{-1}$ z leve

$$\underline{A}_{12} + \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} = 0$$

Vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo

$$-\underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \underline{A}_{22} + \underline{\Sigma}_{22} \underline{A}_{22} = \underline{I}.$$

Sledi

$$\underline{A}_{22} = \left(\underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \right)^{-1}.$$

Temu rezultatu rećemo

inverzijska lema.

3. 5. Pogojne porazdelitve

V 1. poglavju smo definirali pogojno porazdelitev dogodka A glede na dogodek B kot

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Če je X diskretna slučajna spremenljivka, je porazdelitev dana z verjetnostmi $P(X=x)$ za možne vrednosti X. To so verjetnosti dogodkov $\{X=x\}$.
Če vemo, da se je zgodil dogodek B, je naravno, da spremenimo tudi verjetnosti dogodkov $\{X=x\}$ v pogojne verjetnosti. To nas navede na definicijo:

<u>Definicija</u>:

Pogojna porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke X glede na dogodek B s $P(B)>0$ je dana s pogojnimi verjetnostmi $P(\{X = x\} \mid B)$.

<u>Opombi</u>:

(i) Pisali bomo $P(X = x \mid B)$ namesto $P(\{X = x\} \mid B)$.

(ii) Opozimo, da je

$$
\begin{aligned}
\sum_x P(X = x \mid B) &= \sum_x \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P\left(\bigcup_x \{X = x\} \cap B\right)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Gre torej za porazdelitev v originalnem smislu definicije porazdelitev.

Največkrat bo B dogodek oblike $B = \{Y = y\}$ za diskretno slučajno spremenljivko Y.

<u>Primer</u>: Igralcema A in B razdelimo po 5 kart z dobro premešanega kupa standardnih kart. Naj bo X število asov igralca A in Y število asov igralca B. Računamo za $l \leq 4-k$

$$P(Y = l \mid X = k)$$

$$= \frac{P(X = k, Y = l)}{P(X = k)}$$

$$= \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k} \cdot \binom{4-k}{l}\binom{48-(4-k)}{5-l}}{\binom{52}{5} \cdot \binom{48}{5}} \Bigg/ \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}$$

Razpoznamo, da je

$$Y|_{X=k} \sim \text{HiperGeom}(5, 4-k, 48)$$

<u>Primer:</u> Naj bosta X in Y neodvisni z $X \sim Po(\mu)$ in $Y \sim Po(\nu)$. Naj bo $Z = X + Y$.

Računamo vedoč, da je $Z \sim Po(\mu+\nu)$

$$P(X = k \mid Z = n)$$

$$= \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^{n-k}}{(n-k)!} \Big/ \frac{e^{-(\mu+\nu)}(\mu+\nu)^n}{n!}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)^k \left(\frac{\nu}{\mu+\nu}\right)^{n-k}.$$

Sklep: $X|_{Z=n} \sim Bin\left(n, \frac{\mu}{\mu+\nu}\right)$

Definicija: Pogojna porazdelitev diskretnega slučajnega vektorja $\underline{X}$ glede na dogodek B s $P(B) > 0$ je dana z verjetnostmi

$$P(\underline{X} = \underline{x} \mid B)$$

za možne vrednosti $\underline{x}$ slučajnega vektorja $\underline{X}$.

Opomba: Lahko se zgodi, da je $P(\underline{X} = \underline{x} \mid B) = 0$, čeprav $P(\underline{X} = \underline{x}) > 0$.

Primer: Naj bo $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r) \sim \text{Multinom}(n, \underline{p})$. Naj bo

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_s$ za $s < r$ in

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$. Kakšna je pogojna porazdelitev $\underline{X}'$ glede na $\{Y = m\}$?

Možne vrednosti $\underline{X}'$ pri pogoju $\{Y=m\}$ so s-terice $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ z $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{s} k_i = m$. Po definiciji je

$$P(X_1=k_1, \dots, X_s=k_s \mid Y=m)$$

$$= \frac{P(X_1=k_1, \quad , X_s=k_s, Y=m)}{P(Y=m)}$$

$$= \frac{P(X_1=k_1, \dots, X_s=k_s, X_{s+1}+\dots+X_r=n-m)}{P(Y=m)}$$

$$= (*)$$

Vemo: (i) $Y \sim Bin(n, p_1+\dots+p_s)$

(ii) če si mislimo, da škatle od $s+1$ „strnemo" v eno, je vektor $(X_1, \dots, X_s, X_{s+1}+\dots+X_r)$ multinomsko porazdeljen s parametroma n in $(p_1, \dots, p_s, p_{s+1}+\dots+p_r)$

$$(*) = \frac{\dfrac{n!}{k_1!\cdots k_s!\,(n-m)!}\, p_1^{k_1}\cdots(p_{s+1}+\cdots+p_r)^{n-m}}{\binom{n}{m}(p_1+\cdots+p_s)^m(p_{s+1}+\cdots+p_r)^{n-m}}$$

$$= \frac{m!}{k_1!\cdots k_s!}\left(\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_s}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{p_s}{p_1+\cdots+p_s}\right)^{k_s}$$

Če označimo $\underline{p}' = (p_1,\ldots,p_s)/(p_1+\cdots+p_s)$ je sklep: $\underline{X}' \sim \text{Multinom}(m, \underline{p}')$.

Kako pa je za zvezne porazdelitve? Pričakovali bi, da bomo v tem primeru govorili o pogojnih gostotah. Pričakovali bi, da bo pogojna gostota Y glede na $X = x$ sorazmerna funkciji

$$y \longmapsto f_{X,Y}(x,y).$$

Če želimo govoriti o gostotah, bi se te morale integrirati v 1.

Po formuli za robno gostoto je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = f_X(x).$$

To nas navede na naslednjo definicijo.

Definicija: (i) Naj ima vektor (X,Y) gostoto $f_{X,Y}(x,y)$. Če je $f_X(x) > 0$ definiramo pogojno gostoto Y glede na $\{X = x\}$ kot

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

(ii) Naj ima vektor $(\underline{X},\underline{Y})$ gostoto $f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})$. Če je $f_{\underline{X}}(\underline{x}) > 0$, definiramo pogojno gostoto $\underline{Y}$ glede na $\{\underline{X} = \underline{x}\}$ kot

$$f_{\underline{Y}|\underline{X}=\underline{x}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})}{f_{\underline{X}}(\underline{x})}$$

Primer: Naj bo

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Vemo, da je $X \sim N(0,1)$, torej je $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Računamo

$$f_{Y|X=x}(y) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} \cdot e^{-x^2/2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Razpoznamo gostoto normalne porazdelitve s parametroma ρx in $1-\rho^2$. Zapišemo

$$Y|_{X=x} \sim N(\rho x, 1-\rho^2).$$

<u>Primer</u>: Naj bo $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Pišimo $\underline{X} = (\underline{X}^{(1)}, \underline{X}^{(2)})$, $\underline{\mu} = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$

in $\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$. Vemo, da

sta vektorja $\underline{X}^{(1)}$ in $\underline{X}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{X}^{(1)}$

neodvisna. Velja

$$\underline{X}^{(1)} \sim N(\underline{\mu}^{1}, \underline{\Sigma}_{11}) \quad \text{in}$$

$$\underline{Z} = \underline{X}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21}\Sigma_{11}^{-1}\underline{X}^{(1)}$$

$$\sim N\Big(\underline{\mu}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\mu^{(1)},\ \underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{\Sigma}_{12}\Big)$$

Zaradi neodvisnosti je

$$f_{\underline{x}^{(1)}, \underline{z}}(\underline{x}^{(1)}, \underline{z}) = f_{\underline{x}^{(1)}}(\underline{x}^{(1)})\, f_{\underline{z}}(z).$$

Velja

$$\begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{pmatrix} \overset{\Phi}{=} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{Y} \end{pmatrix}$$

$$J\underline{\Phi} \equiv 1.$$

Gostoto $\underline{X}$ lahko zapišemo kot

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)})$$

$$= f_{\underline{X}^{(1)}}(\underline{x}^{(1)})$$

$$\cdot f_{\underline{Z}}(\underline{x}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}\,\underline{x}^{(1)})$$

Sledi

$$f_{X^{(2)} | \underline{X}^{(1)} = \underline{x}^{(1)}}(x^{(2)})$$

$$= f_{\underline{Y}}(\underline{x}^{(2)} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{x}^{(1)}).$$

Z vstavljanjem razberemo

$$X^{(2)} | \underline{X}^{(1)} = \underline{x}^{(1)}$$

$$\sim N(\mu^{(2)} + \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{x}^{(1)},$$

$$\underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1}\underline{\Sigma}_{12}).$$

4. Pričakovana vrednost

4.1. Definicija pričakovane vrednosti

Za diskretne slučajne spremenljivke smo izpeljali formule

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(X=x)$$

$$E[f(X)] = \sum_x f(x)\, P(X=x),$$

za slučajni vektor $\underline{X}$ pa

$$E[f(\underline{X})] = \sum_{\underline{x}} f(\underline{x})\, P(\underline{X} = \underline{x}).$$

Vsote vedno tečejo po vseh možnih vrednostih slučajne spremenljivke X ali slučajnega vektorja $\underline{X}$. Pojem pričakovane vrednosti želimo razširiti še na zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke in vektorje.

Definicija: Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f_X(x)$. Pričakovana vrednost je število

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx .$$

Če je f funkcija, je

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_X(x)\, dx .$$

Opomba: Recimo, da pričakovana vrednost $E[f(X)]$ obstaja, če integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| f_X(x)\, dx$ obstaja v smislu izlimitiranega Riemannovega integrala.

Definicija: Naj bo $\underline{X}$ slučajni vektor z gostoto $f_{\underline{X}}(\underline{x})$. Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Velja

$$E[f(\underline{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x} .$$

Opomba: Rečemo, da $E[f(\underline{X})]$ obstaja, če konvergira integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\underline{x})| \, f_{\underline{X}}(\underline{x}) \, d\underline{x} \, .$$

Primeri:

(i) Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= (*)$$

Nova spremenljivka: $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \cdot e^{-u^2/2} du$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$= \mu \, .$$

Integral z σu odpade zaradi lihosti.

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu)^2 e^{-u^2/2} du$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot e^{-u^2/2} du$$

$$+ \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

(srednji člen v

$(\sigma u + \mu)^2 = \sigma^2 \cdot u^2 + 2\sigma\mu u + \mu^2$

odpade zaradi lihosti)

$= (*)$

Računamo per partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot e^{-u^2/2} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot u \cdot e^{-u^2/2} du$$

$$= -u\, e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$= \sqrt{2\pi}$$

$(*) \quad = \sigma^2 + \mu^2$

<u>Definicija</u>: Naj bo X slučajna spremenljivka. Količini

$$m_k = E(X^k)$$

rečemo k-ti <u>moment</u> slučajne spremenljivke X. Količini

$$c_k = E[(X - E(X))^k]$$

rečemo k-ti centralni moment slučajne spremenljivke X.

(ii) Naj bo $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

$$m_k = E(X^k)$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot x^{a-1} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+k)}{\lambda^{a+k}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\,\lambda^k}$$

$$= \frac{(a)_k}{\lambda^k}$$

(iii) Naj ima par (X, Y) gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Naj bo $f(x,y) = x \cdot y$. Računamo

$$E(X \cdot Y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{R}^2} xy\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2}\, dx \; \times$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy}_{=\rho x}$$

$$= \rho \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2}\, dx}_{=1}$$

$$= \rho$$

(iv) Naj bo $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Vzemimo $f(\underline{x}) = x_i \cdot x_j$. Računamo

$$E[f(\underline{X})]$$

$$= E[X_i \cdot X_j]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, f_{\underline{X}}(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \underline{\Sigma}}} \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, e^{-(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\Sigma}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})} \, d\underline{x}$$

$$= (*)$$

Po predpostavki je $\underline{\Sigma}$ pozitivno definitna, zato je po Choleskem $\underline{\Sigma} = \underline{A}\,\underline{A}^T$ za neko obrnljivo $\underline{A}$.

V integral uvedemo novo spremenljivko $\underline{A}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) = \underline{y}$, kar pomeni $d\underline{x} = |\det(\underline{A})| \cdot d\underline{y}$. Ker je

$$\underline{x} = \underline{A}\,\underline{y} + \underline{\mu}, \text{ je}$$

$$x_i x_j = (\underline{A}\,\underline{y} + \underline{\mu})_i (\underline{A}\,\underline{y} + \underline{\mu})_j$$

$$(*) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\underline{A} y + \underline{\mu})_i \cdot (\underline{A} y + \mu)_j \cdot e^{-\frac{y^T y}{2}} \, dy$$

Izpišemo

$$(\underline{A} y + \underline{\mu})_i \, (\underline{A} y + \underline{\mu})_j$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + \mu_i \right) \left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl} y_l + \mu_j \right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} y_k y_l + \mu_i \sum_{l=1}^{n} a_{jl} y_l + \mu_j \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + \mu_i \cdot \mu_j$$

$$(*) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} \int_{\mathbb{R}^n} y_k y_l \cdot e^{-\frac{y^T y}{2}} \, dy + \mu_i \cdot \mu_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} + \mu_i \mu_j$$

$$= (\underline{A} \cdot \underline{A}^T)_{i,j} + \mu_i \cdot \mu_j$$

$$= \underline{\Sigma}_{ij} + \mu_i \cdot \mu_j$$

<u>Opombe</u>: integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_k y_l \cdot e^{-\frac{y^T y}{2}} dy \neq 0$$ samo

za $k = l$ zaradi simetrije.

Integral $\int_{\mathbb{R}^n} y_k e^{-\frac{y^T y}{2}} dy = 0$

zaradi simetrije.

Najpomembnejša lastnost pričakovane vrednosti v diskretnem primeru je bila linearnost. Ta lastnost se prenese tudi na zvezni primer.

Izrek 4.1: Naj bosta X, Y slučajni spremenljivki z gostoto $f_{X,Y}(x,y)$. Če obstajata $E(X)$ in $E(Y)$, potem obstaja tudi $E(\alpha X + \beta Y)$ in velja

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Dokaz: Zapišemo

$$
\begin{aligned}
E(\alpha X + \beta Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha x + \beta y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^2} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dy \\
&= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \\
&\quad + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y\, dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx
\end{aligned}
$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$

$$= \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Obstoj $E(\alpha X + \beta Y)$ sledi iz trikotniške neenakosti.

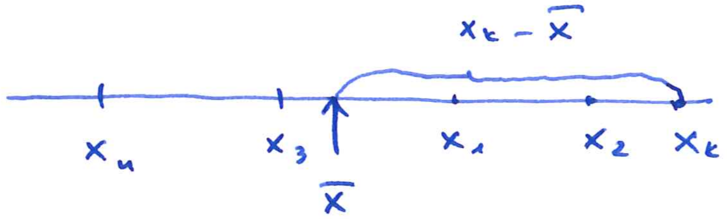
Opomba: Linearnost velja tudi za linearne kombinacije več slučajnih spremenljivk. Povsem enak dokaz nam da tudi

$$E[f(X,Y) + g(X,Y)] = E[f(X,Y)] + E[g(X,Y)].$$

4.2. Varianca in kovarianca

Za dano listo števil bi radi povedali, koliko so ta števila „razpršena". Smiselna mera razpršenosti bi za izhodišče vzela povprečje $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Slika:



Dalje bi morala ta mera imeti lastnost, da množenje s konstanto c števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mero razpršenosti množi s c. Smiselno je pogledati razdalje x_k od $\bar{x}$, torej $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$.

Če so te razdalje „velike", so števila bolj „razpršena".

„Velike" razumemo v smislu absolutne vrednosti. Prva ideja bi bila $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-\bar{x}|$. To je izbral Laplace (1749 – 1827).

Drugačno idejo je imel Gauss (1777-1855). Namesto absolutne vrednosti je izbral kvadrat in potem koren, torej

$$\sigma=\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right]^{1/2}.$$

Gaussova izbira vodi do boljše matematike. Preprost razlog je ta, da za $|a+b|$ ni preproste formule, za $(a+b)^2$ pa je. Količini σ rečemo <u>standardni</u> <u>odklon</u> števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Idejo prenesemo v svet slučajnih spremenljivk, tako da slučajno spremenljivko „ponavljamo".

The estimation of a magnitude subject to a larger or smaller error can be compared not inappropriately to a game of chance in which one can only lose and never win and in which each possible error corresponds to a loss ... However, what specific loss we should ascribe to any specific error is by no means clear of itself. In fact, the determination of this loss depends at least in part on our judgement ... Among the infinite variety of possible functions the one that is the simplest seems to have the advantage and this is unquestionably the square ... Laplace treated the problem in a similar fashion, but he chose the size of the error as the measure of loss. However, unless we are mistaken this choice is surely not less arbitrary than ours.

C. F. Gauss, 1777-1855

Če so $x_1, x_2, \ldots$ ponovitve slučajne spremenljivke X, je

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 \approx E[(X-E(X))^2].$$

Ta razmislek motivira naslednjo definicijo:

<u>Definicija</u>: Varianco slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$\mathrm{var}(X) = E[(X-E(X))^2].$$

Rečemo, da varianca obstaja, če obstaja pričakovana vrednost na desni. Standardni odklon slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$SD(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}.$$

Izraz za varianco lahko nekoliko spremenimo v obliko, bolj pripravno za računanje.

$E[(X-E(X))^2]$

$= E[X^2 - 2E(X)\cdot X + [E(X)]^2]$

lin.

$= E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2$

$= E(X^2) - [E(X)]^2$

Povzamemo:

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Iz linearnosti tudi sledi

$$\boxed{\mathrm{var}(aX) = a^2\,\mathrm{var}(X)}$$

Primeri:

(i) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Vemo:

$E(X) = np \qquad E(X^2) = npq + n^2p^2$

Sledi

$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= npq$

(ii) $X \sim NegBin(m, p)$. Vemo:

$$E(X) = \frac{m}{p}; \quad E(X^2) = \frac{mq}{p^2} + \frac{m^2}{p^2}$$

Sledi: $var(X) = \frac{mq}{p^2}$.

(iii) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vemo:

$$E(X) = \mu; \quad E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Sledi: $var(X) = \sigma^2$

Opomba: Parametra μ in σ^2 v normalni porazdelitvi sta enaka pričakovani vrednosti in varianci.

(iv) $X \sim \Gamma(a, \lambda)$. Vemo:

$$E(X) = \frac{a}{\lambda} \qquad E(X^2) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}.$$

Sledi: $var(X) = \frac{a}{\lambda^2}$.

Kako pa je z varianco vsote slučajnih spremenljivk?

Računamo

$$\mathrm{var}(X+Y)$$

$$= E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2$$

lin.

$$= E(X^2 + 2X\cdot Y + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

lin.

$$= \underline{E(X^2)} + 2E(XY) + \underline{E(Y^2)} - \underline{[E(X)]^2} - 2E(X)\cdot E(Y) - \underline{[E(Y)]^2}$$

$$= \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\left(E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)\right).$$

Nobenega razloga ni, da bi bil izraz v oklepaju enak 0.

Definicija: Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. Količina

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

rečemo kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y. Količini

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\cdot \mathrm{var}(Y)}}$$

rečemo korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y.

Opomba: Rečemo, da kovarianca obstaja, če obstajajo pričakovane vrednosti v definiciji. Zaradi Cauchy-Schwartzove neenačbe

$$E(|X\cdot Y|) \leq E(X^2)^{1/2}\cdot E(Y^2)^{1/2}$$

je dovolj, da obstajata $E(X^2)$ in $E(Y^2)$.

Izrek 4.2: Za kovariance velja

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k, \sum_{l=1}^{n} \beta_l Y_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \beta_l \,\mathrm{cov}(X_k, Y_l).$$

Opomba: Lastnosti večemo bilinearnost kovariance.

Dokaz: Zaradi linearnosti je

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \beta_l Y_l\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \beta_l X_k Y_l\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \beta_l E(X_k Y_l)$$

Po drugi strani je

$$E\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k\right) \cdot E\left(\sum_{l=1}^{n} \beta_l Y_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \beta_l E(X_k) \cdot E(Y_l)$$

Odštejemo in trditev sledi.

Primera:

(i) Naj bo $\underline{X} \sim \mathrm{Multinom}(n, \underline{p})$.

Vemo: $X_k \sim \mathrm{Bin}(n, p_k)$, torej $E(X_k) = np_k$. Izračunali smo:

$$E(X_k \cdot X_l) = -np_kp_l + n^2 p_k p_l.$$

Sledi

$$\mathrm{cov}(X_k, X_l) = E(X_kX_l) - E(X_k)E(X_l)$$

$$= -np_kp_l.$$

Izračunajmo še drugače: vemo, da je $X_k + X_l \sim \mathrm{Bin}(n, p_k+p_l)$, zato je

$$\mathrm{var}(X_k + X_l) = n(p_k+p_l)(1-p_k-p_l)$$

$$\|$$

$$\mathrm{var}(X_k) + \mathrm{var}(X_l) + 2\,\mathrm{cov}(X_k, X_l)$$

$$= np_k(1-p_k) + np_l(1-p_l) + 2\,\mathrm{cov}(X_k, X_l)$$

To zadnje je linearna enačba za $cov(X_k, X_l)$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
cov(X_k, X_l) &= \frac{1}{2}\{n(p_k + p_l)(1 - p_k - p_l) \\
&\qquad - np_k(1-p_k) - np_l(1-p_l)\} \\
&= -np_kp_l
\end{aligned}
$$

(ii) Naj bo $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

Izračunali smo

$$E(X_k \cdot X_l) = \underline{\Sigma}_{k,l} + \mu_k \cdot \mu_l$$

Vemo tudi: $X_k \sim N(\mu_k, \underline{\Sigma}_{kk})$,

zato je $E(X_k) = \mu_k$. Sledi

$$cov(X_k, X_l) = \underline{\Sigma}_{k,l}.$$

Izračunajmo še drugače: po Choleskem je $\underline{\Sigma} = \underline{A} \cdot \underline{A}^T$. Po transformacijski formuli vemo, da je za neodvisne, standardizirano normalne $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ in $\underline{Z}^T = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$

$$\underline{X} = \underline{A} \cdot \underline{Z} + \underline{\mu} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

<u>Stranska izpeljava</u>: če sta X, Y diskretni in neodvisni, je

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x,y} x \cdot y \, P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x,y} x \cdot y \, P(X = x) P(Y = y)$$

$$= \left(\sum_{x} x P(X = x)\right)\left(\sum_{y} y P(Y = y)\right),$$

torej je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ in posledično $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Podobno velja za zvezne slučajne pare (X, Y).

Nadaljujemo s primerom: vemo, da je

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} Z_i + \mu_k$$

$$X_l = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} Z_j + \mu_l$$

Po izreku 4.2 je

$$\mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \,\mathrm{cov}(Z_i, Z_j).$$

Ker so $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ neodvisne za $i \neq j$, ostanejo samo kovariance

$$\mathrm{cov}(Z_i, Z_i) = E(Z_i \cdot Z_i) - E(Z_i) E(Z_i)$$

$$= \mathrm{var}(Z_i)$$

$$= 1.$$

Sledi

$$\mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{li} = (\underline{A} \cdot \underline{A}^T)_{k,l}$$

$$= \underline{\Sigma}_{k,l}$$

<u>Izrek 4.3</u> : Velja

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \,\mathrm{var}(X_i)$$

$$+ \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \,\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

<u>Dokaz</u> : Sledi iz Izreka 4.2, če računamo $\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right)$.

<u>Primer</u> : Hipergeometrijsko porazdelitev lahko zapišemo kot

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n ,$$

kjer je

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{če je } k\text{-ta izbrana kroglica bela;} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ugotovili smo, da je $I_k \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{B}{N}\right)$, če je v posodi B belih in R rdečih kroglic.

Če sta I, J indikatorja, je

$$E(I) = P(I=1)$$

$$E(I^2) = E(I), \quad \text{torej}$$

$$\text{var}(I) = P(I=1)\,(1 - P(I=1)) \quad \text{ter}$$

$$\begin{aligned} E(I \cdot J) &= P(I \cdot J = 1) \\ &= P(I=1, J=1), \quad \text{torej} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(I, J) &= P(I=1, J=1) \\ &\quad - P(I=1)\,P(J=1). \end{aligned}$$

Iz formule

$$\begin{aligned} &\text{var}(I_1 + \cdots + I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \text{var}(I_k) + \sum_{k \neq l} \text{cov}(I_k, I_l) \end{aligned}$$

dobimo najprej za $X \sim \text{HiperGeom}(n, B, N)$

$$\operatorname{var}(X) = n \cdot \frac{B}{N}\left(1 - \frac{B}{N}\right) + \sum_{k \neq l} \operatorname{cov}(I_k, I_l)$$

Zaradi simetrije (sprašujemo pred izbiranjem kroglic!) imajo vsi pari (I_k, I_l) za $k \neq l$ enako porazdelitev in posledično enako kovarianco.

Računamo

$$\operatorname{cov}(I_1, I_2) = P(I_1 = 1, I_2 = 1) - P(I_1 = 1) P(I_2 = 1)$$

$$= P(\{\text{prva kroglica bela}\} \cap \{\text{druga kr. bela}\}) - \frac{B^2}{N^2}$$

$$= \frac{B}{N} \cdot \frac{B-1}{N-1} - \frac{B^2}{N^2}$$

$$= \frac{B}{N}\left[\frac{B-1}{N-1} - \frac{B}{N}\right]$$

$$= (*)$$

$$(*) = \frac{B}{N} \cdot \frac{N(B-1) - B(N-1)}{(N-1)\cdot N}$$

$$= \frac{B}{N} \cdot \frac{-N+B}{(N-1)N}$$

$$= -\frac{B}{N}\left(1-\frac{B}{N}\right)\cdot\frac{1}{N-1}.$$

Kovarianc v vsoti je $n(n-1)$, zato je

$$\mathrm{var}(X) = n\cdot\frac{B}{N}\cdot\frac{R}{N} + n(n-1)\left[-\frac{B}{N}\cdot\frac{R}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\right]$$

$$= n\,\frac{B}{N}\cdot\frac{R}{N}\left[1-\frac{n-1}{N-1}\right]$$

$$= n\cdot\frac{B}{N}\cdot\frac{R}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

<u>Primer</u>: Pri izbiranju kroglic lahko izbiranje nadaljujemo do konca in dobimo indikatorje $I_1, I_2, \dots, I_N$. Velja $I_1 + I_2 + \dots + I_N = B$, zato je

$$\mathrm{cov}(I_1, I_1 + I_2 + \dots + I_N) = 0.$$

Iz bilinearnosti sledi

$$\operatorname{cov}(I_1, I_1) + (N-1)\operatorname{cov}(I_1, I_2) = 0,$$

torej

$$\operatorname{cov}(I_1, I_2) = -\frac{1}{N-1}\operatorname{var}(I_1).$$

<u>Definicija</u>: Za slučajni vektor $\underline{X}$ definiramo

$$E(\underline{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}.$$

Rečemo, da pričakovana vrednost obstaja, če obstaja pričakovana vrednost vseh komponent.

<u>Definicija</u>: Naj bosta $\underline{X}, \underline{Y}$ slučajna vektorja. Kovarianco definiramo kot

$$\operatorname{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X_1, Y_1), & \dots & , \operatorname{cov}(X_1, Y_n) \\ \operatorname{cov}(X_m, Y_1), & \dots & , \operatorname{cov}(X_m, Y_n) \end{pmatrix}$$

Po analogiji je

$$\mathrm{var}(\underline{X}) = \mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{X}).$$

<u>Izrek 4.5</u>: Naj bo $\underline{X}$ slučajna $m \times n$ matrika (t.j. vsi elementi $\underline{X}$ so slučajne spremenljivke). Za fiksni matriki $\underline{A}, \underline{B}$ velja

$$E(\underline{A} \cdot \underline{X} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot E(\underline{X}) \cdot \underline{B},$$

kjer $E(\underline{X})$ razumemo po komponentah.

<u>Dokaz</u>: Dokaz sledi naravnost iz linearnosti pričakovane vrednosti.

<u>Dogovor</u>: Ko računamo z matrikami, vedno razumemo $\underline{X}$ kot stolpec.

Opazimo

$$\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = E[\underline{X} \cdot \underline{Y}^T] - E(\underline{X}) E(\underline{Y}^T)$$

Izrek 4.6: Naj bosta $\underline{X}, \underline{Y}$ slučajna vektorja. Velja

$$\mathrm{cov}(\underline{A}\underline{X}, \underline{B}\underline{Y}) = \underline{A}\,\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y})\cdot \underline{B}^T$$

Dokaz: Računamo

$$\mathrm{cov}(\underline{A}\underline{X}, \underline{B}\underline{Y}) =$$

$$= E[\underline{A}\cdot\underline{X}\cdot\underline{Y}^T\underline{B}^T] - E(\underline{A}\cdot\underline{X})\cdot E(\underline{Y}^T\cdot\underline{B}^T)$$

$$= A\; E(\underline{X}\cdot\underline{Y}^T)\,\underline{B}^T - \underline{A}\cdot E(\underline{X})\cdot E(\underline{Y}^T)\cdot\underline{B}^T$$

$$= \underline{A}\cdot\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y})\cdot\underline{B}^T$$

Primer: Naj bo $\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{pmatrix}$ $\sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ z $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}$ in

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Naj bo

$$\underline{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{\Sigma}_{21}\underline{\Sigma}_{11}^{-1} & \underline{I} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Izračunali smo

$$\mathrm{var}(\underline{Y}) = \underline{A} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{A}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{\Sigma}_{22} - \underline{\Sigma}_{21} \underline{\Sigma}_{11}^{-1} \underline{\Sigma}_{12} \end{pmatrix}$$

4.3. Pogojna pričakovana vrednost, pogojna varianca

Oglejmo si najprej diskretni primer. Definirali smo pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na dogodek B kot

$$P(X = x \mid B) = \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)}.$$

Naravno je pogojno pričakovano vrednost definirati s pogojno porazdelitvijo.

Definicije:

(i) Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka in B dogodek z $P(B) > 0$. Pogojno pričakovano vrednost X glede na dogodek B definiramo kot

$$E(X \mid B) = \sum_x x\, P(X = x \mid B)$$

(ii) Naj bo f funkcija. Velja

$$E[f(X) \mid B] = \sum_x f(x)\, P(X = x \mid B)$$

Opomba: Glede obstoja pogojnih pričakovanih vrednosti velja ista opomba kot pri pričakovanih vrednostih.

Za diskretne slučajne spremenljivke lahko $E(X \mid B)$ zapišemo še nekoliko drugače.

Računamo

$$E(X\cdot 1_B) = \sum_x x\, P(X\cdot 1_B = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \\ x\neq 0}} x \cdot P(\{X=x\}\cap B)$$

$$= \sum_{\substack{x \\ x\neq 0}} x\, P(X=x \mid B)\cdot P(B)$$

$$= E(X\mid B)\cdot P(B)$$

Povzamemo

$$\boxed{E(X\mid B) = \frac{1}{P(B)}\cdot E(X\cdot 1_B)}$$

Iz tega zapisa takoj sledi, da je

$$E(\alpha X + \beta Y \mid B)$$

$$= \frac{1}{P(B)}\, E[(\alpha X+\beta Y)\cdot 1_B]$$

$$\overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{P(B)}\left(\alpha\, E(X\cdot 1_B) + \beta\, E(Y\cdot 1_B)\right)$$

$$= \alpha\, E(X\mid B) + \beta\, E(Y\mid B).$$

Pogojna pričakovana vrednost je torej linearna.

Najpogosteje bomo uporabljali dogodek B oblike $\{Y=y\}$ za neko diskretno slučajno spremenljivko. V tem primeru bomo pisali

$$E(X \mid Y=y) = E(X \mid \{Y=y\}).$$

Pogojno varianco definiramo na povsem naraven način kot

$$\mathrm{var}(X \mid B) = E(X^2 \mid B) - [E(X \mid B)]^2.$$

<u>Definicija</u>: Naj bo $\underline{X}$ diskreten slučajni vektor in $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo B dogodek z $P(B)>0$. Pogojno pričakovano vrednost $E[f(\underline{X}) \mid B]$ definiramo kot

$$E[f(\underline{X}) \mid B] = \sum_{\underline{x}} f(\underline{x})\, P(\underline{X}=\underline{x})$$

Tipično bo dogodek B oblike $B = \{\underline{Y} = y\}$ za nek slučajni vektor $\underline{Y}$. V tem primeru bomo pisali

$E(f(\underline{x}) \mid \underline{Y} = y)$.

<u>Izrek 4.7</u>: Naj bo $\{H_1, H_2, \ldots\}$ particija Ω. Naj bo $\underline{X}$ diskreten slučajni vektor. Velja

$$E[f(\underline{X})] = \sum_k E[f(\underline{X}) \mid H_k] P(H_k).$$

<u>Opomba</u>: Formuli lahko rečemo formula za popolno pričakovano vrednost.

<u>Dokaz</u>: Računamo

$$\sum_k E[f(\underline{X}) \mid H_k] \cdot P(H_k)$$

$$= \sum_k \sum_{\underline{x}} f(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x} \mid H_k) P(H_k)$$

$$= \sum_{\underline{x}} \sum_k f(\underline{x}) P(\underline{X} = \underline{x} \mid H_k) P(H_k)$$

$$= \sum_{\underline{x}} f(\underline{x}) \sum_k P(\underline{X} = \underline{x} \mid H_k) P(H_k)$$

$$= \sum_{\underline{x}} f(\underline{x})\, P(\underline{X} = \underline{x})$$

V zadnji vrstici smo uporabili formulo za popolno verjetnost. Zamenjava vrstnega reda seštevanja je utemeljena po Dodatku A pod pogojem, da obstaja $E[f(\underline{X})]$.

Primeri:

(i) Igralcema A in B razdelimo po 5 kart z dobro premešanega kupa kart. Naj bo X število asov prvega igralca in B število asov drugega. Vemo

$$Y \mid_{X=k} \sim \text{HiperGeom}(5, 4-k, 47).$$

Sledi

$$E(Y \mid X = k) = 5 \cdot \frac{4-k}{47}$$ in

$$\text{var}(Y \mid X = k) = 5 \cdot \frac{4-k}{47}\left(1 - \frac{4-k}{47}\right)\frac{47-5}{47-1}.$$

(ii) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo r grbov zapored. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa označimo s p. Naj bo X število potrebnih metov vključno z zadnjimi r grbi. V nadaljevanju bomo potrebovali dejstvo, da je $E(X) < \infty$. Če mete razdelimo na disjunktne bloke dolžine r in rečemo

$$B_k = \{ \text{v } k\text{-tem bloku dobimo } r \text{ grbov} \},$$

je

$$\{ \text{nikoli ni } r\text{-grbov zapored} \} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c$$

Dogodki $B_1, B_2, \ldots$ so neodvisni, zato so neodvisni tudi dogodki $B_1^c, B_2^c, \ldots$.

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c\Big) \leq P\Big(\bigcap_{k=1}^{N} B_k^c\Big) = \prod_{k=1}^{N} P(B_c^c)$$
$$= \prod_{k=1}^{N} (1-p^r) = (1-p^r)^N.$$

Ker ocena velja za vsak $N \geq 1$ in predpostavljamo $p > 0$, je

$$P(\{\text{nikoli ne dobimo } r \text{ grbov zapored}\}) = 0.$$

Poleg tega je

$$X \leq r \times \text{št. bloka, ko se pojavi } r \text{ grbov zapored}$$

Številka bloka $Y \sim \text{Geom}(1-p^r)$, zato je $E(Y) = \frac{1}{1-p^r}$. Sledi

$$E(X) \leq \frac{1}{1-p^r} \times r < \infty.$$

Podobno se prepričamo, da je $E(X^2) < \infty$.

Naj bo $H_k = \{$prva številka se pojavi v k-tem metu$\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Družina $\{H_1, H_2, \ldots\}$ je partícija in po geometrijski porazdelitvi velja $P(H_k) = p^{k-1} \cdot q$.

Opazimo naslednje:

- za $k \geq r+1$, je $E(X \mid H_k) = r$.
- za $k \leq r$ se po prvi številki zgodba „resetira" in bomo spet čakali na r zaporednih grbov. Sledi

$$E(X \mid H_k) = k + E(X)$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost bo

$$E(X)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} E(X \mid H_k) \cdot P(H_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{r} (k + E(X)) \cdot P(H_k) + \sum_{k=r+1}^{\infty} r \cdot P(H_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{r} k \cdot P(H_k) + E(X) \sum_{k=1}^{r} P(H_k) + r \cdot \sum_{k=r+1}^{\infty} P(H_k)$$

Ta enačba je linearna enačba za $E(X)$. Če vemo, da je $E(X) < \infty$, je $E(X)$ rešitev te linearne enačbe.

Izračunamo še

$$\sum_{k=1}^{r} k\, P(H_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} k \cdot p^{k-1} \cdot q$$

$$= q \cdot \frac{1 - p^r(1+r) + r p^{1+r}}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{1 - p^r(1+r) + r p^{1+r}}{q}$$

$$\sum_{k=1}^{r} P(H_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} p^{k-1} \cdot q$$

$$= q \cdot \frac{1-p^n}{1-p}$$

$$= 1 - p^n$$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p^{k-1} \cdot q$$

$$= p^n \cdot q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p^k$$

$$= p^n$$

Če vse sestavimo, dobimo

$$E(X) \cdot p^r =$$

$$= \frac{1-(r+1)p^r + r p^{r+1}}{q} + r p^r$$

$$= \frac{1-(r+1)p^r + r \cancel{p^{r+1}} + r p^r - r \cancel{p^{r+1}}}{q}$$

$$= \frac{1-p^r}{q}$$

$$\Rightarrow \quad E(X) = \frac{1-p^r}{q \cdot p^r}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^r}$$

Za $E(X^2)$ postopamo podobno.
Podobno dokažemo, da je $E(X^2) < \infty$.
Dobimo

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{r} E[(X+k)^2]\, P(H_k)$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{\infty} r^2 P(H_k).$$

$$= E(X^2) \sum_{k=1}^{r} P(H_k) + (*)$$

$$(*) \quad + 2E(X)\sum_{k=1}^{r} k P(H_k) + r^2 \sum_{k=r+1}^{\infty} P(H_k)$$

Linearno enačbo preuredimo in dobimo

$$E(X^2) = \frac{1}{p^r}\left[\frac{2(1-p^r)}{q} \cdot \frac{1-(r+1)p^r + r p^{r+1}}{q} + r^2 \cdot p^r\right]$$

Iz tega po nekaj računanja sledi varianca.

Posvetimo se še zveznemu primeru. Za zvezne porazdelitve smo za primere, ko je $f_X(x) > 0$ definirali pogojno gostoto kot

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

<u>Definicija</u>: Naj ima vektor $(\underline{X}, \underline{Y})$ gostoto $f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{y})$. Naj bo f funkcija. Pogojno pričakovano vrednost $f(\underline{Y})$ pogojno na $\{\underline{X}=\underline{x}\}$ za $\underline{x}$, za katere je $f_{\underline{X}}(\underline{x})>0$, definiramo kot

$$E[f(\underline{Y}) \mid \underline{X}=\underline{x}]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, f_{\underline{Y}\mid\underline{X}=\underline{x}}(y)\, dy$$

<u>Opomba</u>: Glede obstoja veljajo enake opombe kot pri običajnih pričakovanih vrednostih.

Ker z pogojnimi gostotami računamo na enak način kot z običajnimi gostotami, bo pogojna pričakovana vrednost tudi v zveznem primeru linearna, torej

$$E[\alpha Y_1 + \beta Y_2 \mid \underline{X}=\underline{x}]$$

$$= \alpha\, E(Y_1 \mid \underline{X}=\underline{x}) + \beta\, E(Y_2 \mid \underline{X}=\underline{x})$$

Primer: Naj bo

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Izračunali smo, da je

$$Y \mid X=x \sim N(\rho x, 1-\rho^2).$$

Sledi

$$E(Y \mid X=x) = \rho x \quad \text{in}$$

$$\operatorname{var}(Y \mid X=x) = 1-\rho^2.$$

Pri tem je jasno, da definiramo

$$\operatorname{var}(Y \mid \underline{X}=\underline{x})$$

$$= E(Y^2 \mid \underline{X}=\underline{x}) - [E(Y \mid \underline{X}=\underline{x})]^2.$$

Izrek 4.8: Velja

$$E[f(\underline{Y})] = \int_{\mathbb{R}^n} E[f(\underline{Y}) \mid \underline{X}=\underline{x}]\, f_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Opomba: Načeloma $E[f(\underline{Y}) \mid \underline{X} = \underline{x}]$ ni definirana, ko je $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = 0$. Vendar na tej množici množimo z 0 in ni važno, kaj je vrednost pogojne pričakovane vrednosti.

Dokaz: Računamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} E[f(\underline{Y}) \mid \underline{X} = \underline{x}] \, f_{\underline{X}}(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y) \, f_{\underline{Y} \mid \underline{X} = \underline{x}}(y) \, dy \right) \times f_{\underline{X}}(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \, dy \times \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x}, y) \, d\underline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, f_{\underline{Y}}(y) \, dy$$

$$= E[f(\underline{Y})]$$

Zamenjava vrstnega reda integriranja je utemeljena, če vsaj en integral obstaja.

Primer: Kot znamo privzemimo, da je za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(e^{i\lambda X}) = e^{i\mu\lambda - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}},$$

kjer razumemo

$$E(e^{i\lambda X}) = E[\cos(\lambda X)] + i\,E[\sin(\lambda X)]$$

Zgornje je znano iz poglavja o Fourierovih transformacijah. Naj bodo Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 neodvisne z $Z_k \sim N(0,1)$ za $k = 1, 2, 3, 4$; Naj bo $X = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$. Računamo

$$E[e^{i\lambda X}] = E[e^{i(Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4)\lambda}].$$

Zaradi neodvisnosti je

$$f_{Z_2, Z_4 \mid Z_1 = z_1, Z_3 = z_3}(z_2, z_4)$$

$$= f_{Z_2, Z_4}(z_2, z_4)$$

Pogojna porazdelitev $Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$ pogojno na $\{Z_1 = z_1, Z_3 = z_3\}$ je $N(0, z_1^2 + z_3^2)$. Sledi

$$E\left[e^{i(Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4)\lambda} \mid Z_1 = z_1, Z_3 = z_3 \right]$$

$$= E\left[e^{i\lambda X} \right],$$ kjer je $X \sim N(0, z_1^2 + z_3^2)$, torej je

$$= e^{-\frac{\lambda^2 (z_1^2 + z_3^2)}{2}}.$$

Sledi

$$E\left[e^{i\lambda(Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4)} \cancel{\mid Z_1 = z_1, Z_3 = z_3} \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\lambda^2 (z_1^2 + z_3^2)}{2}} f_{Z_1, Z_3}(z_1, z_3) \, dz_1 \, dz_3$$

$$= (*)$$

$$(*) = E\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}(Z_1^2+Z_3^2)}\right]$$

Vemo: $Z_1^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, $Z_3^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 1/2)$,
zato je $Z_1^2 + Z_3^2 \sim \Gamma(1, 1/2) = \exp(1/2)$.
Sledi

$$E\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}(Z_1^2+Z_2^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{2}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}u}\, du$$

$$= \frac{1}{1+\lambda^2}$$

Še nekaj zaključnih pripomb:

(i) Po analogiji definiramo

$$\mathrm{cov}(X,Y \mid B) = E(XY \mid B) - E(X \mid B)E(Y \mid B).$$

Iz linearnosti pogojne pričakovane vrednosti sledi bilinearnost pogojne kovariance.

(ii) Za zvezne porazdelitve analogno definiramo

$$E(Y_1 Y_2 \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} y_1 y_2 \, f_{Y_1, Y_2 \mid \underline{X} = \underline{x}}(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2$$

in

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2 \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$= E(Y_1 Y_2 \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$- E(Y_1 \mid \underline{X} = \underline{x}) \, E(Y_2 \mid \underline{X} = \underline{x})$$

5. Rodovne funkcije

5.1. Definicije in osnovne lastnosti

Ideja za rodovne funkcije je izposojena iz kombinatorike. Zaporedje števil $c_k \in \mathbb{C}$ „zapakiramo" v potenčno funkcijo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$. S funkcijami je pogosto laže računati kot z zaporedji.

V tem poglavju se bomo omejili na nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke.

<u>Definicija</u>: Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Rodovno funkcijo G_X definiramo za $|s| \leq 1$ z

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, s^k.$$

Potenčna vrsta je majoriziruana z $P(X=k)$ za $|s| \le 1$, zato na $[-1,1]$ konvergira absolutno proti zvezni funkciji. Na $(-1,1)$ je vsodovna funkcija neskončnokrat odvedljiva. Oglejmo si nekaj primerov rodovnih funkcij.

(i) Če je $X \sim Bin(n,p)$, je

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \cdot s^k$$

$$= (ps+q)^n$$

(ii) recimo, da je $X \sim NegBin(m,p)$.

$$G_X(s) = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} p^m \cdot q^{k-m} \cdot s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} p^m q^k \cdot s^{m+k}$$

$$= (ps)^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-1)^k (qs)^k$$

$$= (ps)^m \cdot \frac{1}{(1-qs)^m}$$

$$= \left(\frac{ps}{1-qs} \right)^m$$

Opomba: Uporabili smo Newtonovo formulo

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \text{za } |x| < 1.$$

Če je $q \in (0,1)$, je za $|s| \leq 1$ produkt $|qs| < 1$ in zgornje velja.

(iii) Za $X \sim Po(\lambda)$ dobimo

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot s^k$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s}$$

$$= e^{-\lambda(1-s)}$$

(iv) Naj ima X Póleyevo porazdelitev

$$P(X=k) = \frac{\beta^a \, (a)_k}{k! \, (1+\beta)^{a+k}}$$

za $k = 0, 1, \ldots$, $a, \beta > 0$. Opazimo

$$\frac{(a)_k}{k!} = \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)}{k!}$$

$$= \binom{-a}{k}(-1)^k$$

Računamo

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^a \binom{-a}{k}(-1)^k \cdot \frac{s^k}{(1+\beta)^{a+k}}$$

$$= \frac{\beta^a}{(1+\beta)^a} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k}(-1)^k \left(\frac{s}{1+\beta}\right)^k$$

$$= \frac{\beta^a}{(1+\beta)^a} \cdot \left(1 - \frac{s}{1+\beta}\right)^{-a}$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta-s}\right)^a.$$

<u>Izrek 5.1</u>: Rodovna funkcija G_X enolično določa porazdelitev X.

<u>Dokaz</u>: Iz Analize 1 vemo, da je

$$P(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Alternativno lahko napišemo

$$E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P(X=k)$$

$$= G_X(s).$$

Izrek 5.2: Naj bosta X, Y neodvisni. Velja

$$\boxed{G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)}$$

Dokaz: Pišemo

$$E(s^{X+Y}) = E(s^X \cdot s^Y)$$

$$\overset{(\text{neodv.})}{=} E(s^X) \cdot E(s^Y)$$

Opomba: (i) V jeziku Analize 1 smo dokazali Cauchyjevo pravilo za produkt dveh potenčnih vrst.

(ii) Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, velja

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s).$$

Primer: Če sta X, Y neodvisni in imata Pólyevo porazdelitev

$$P(X=k) = \frac{\beta^a (a)_k}{k!\,(1+\beta)^{a+k}}, \quad k=0,1,\ldots$$

$$P(Y=l) = \frac{\beta^b (b)_l}{l!\,(1+\beta)^{b+l}}, \quad l=0,1,\ldots$$

je

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)\cdot G_Y(s)$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta-s}\right)^a \left(\frac{\beta}{1+\beta-s}\right)^b$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta-s}\right)^{a+b}.$$

Razpoznamo rodovno funkcijo Pólyeve porazdelitve, le da je parameter $a+b$. Zaradi enoličnosti je

$$P(X+Y=n) = \frac{\beta^{a+b} (a+b)_n}{n!\,(1+\beta)^{a+b+n}}$$

za $n=0,1,\ldots$.

Ta primer smo že obravnavali v poglavju 3.5., vendar je tukaj z rodovnimi funkcijami vse bolj elegantno.

<u>Izrek 5.3</u>: Naj bo X slučajna spremenljivka z rodovno funkcijo $G_X(s)$. Velja

(i) $$E(X) = \lim_{s \uparrow 1} G_X'(s).$$

(ii) $$E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \lim_{s \uparrow 1} G_X^{(k)}(s)$$

<u>Dokaz</u>:

(i) Funkcija G_X' je na $(0,1)$ naraščajoča, ker je potenčna vrsta s nenegativnimi koeficienti.

Za vsak N velja neenačba

$$\sum_{k=0}^{N} kP(X=k)s^{k-1} \leq G_X'(s) \leq E(X).$$

Sledi

$$\lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=0}^{N} k P(X=k) s^{k-1} \leq \lim_{s\uparrow 1} G_X'(s)$$

$$\leq E(X).$$

ali

$$\sum_{k=0}^{N} k P(X=k) \leq \lim_{s\uparrow 1} G_X'(s) \leq E(X).$$

Če je $E(X) < \infty$, vsota na levi konvergira. Ker ocena velja za vse N, je lahko limita samo $E(X)$. Če je $E(X) = \infty$, je lahko delna vsota na levi poljubno velika, kar pomeni $\lim_{s\uparrow 1} G_X'(s) = \infty$.

(ii) Dokaz za splošen k je enak + nekaj več pisanja.

V uporabah večkrat naletimo na seštevanje slučajnega števila slučajnih spremenljivk. Kot bomo videli, ta koncept naravno nastane v zavarovalništvu. Formalno naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke in $N \geq 0$ slučajna spremenljivka. Definiramo $S : \Omega \to \mathbb{R}$ z

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega),$$

pri čemer vsoto za $N(\omega) = 0$ interpretiramo kot 0. Za zgornjo vsoto bomo uporabljali intuitiven simbol $X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

<u>Izrek 5.4</u>: Naj bodo slučajne spremenljivke $N, X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne in naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ enako porazdeljene. Velja

$$G_{X_1 + \cdots + X_N}(s) = G_N(G_{X_1}(s)).$$

Dokaz: Uporabili bomo dejstvo, da je za neodvisni X in Y

$E(f(Y) \mid X = x) = E[f(Y)]$. Računamo po formuli za popolno pričakovano vrednost

$$E(s^{X_1 + \dots + X_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{X_1 + \dots + X_N} \mid N = n) P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{X_1 + \dots + X_n} \mid N = n) P(N = n)$$

$$\overset{(\text{neodv.})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{X_1 + \dots + X_n}) P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [G_{X_1}(s)]^n P(N = n)$$

$$= G_N(G_{X_1}(s)).$$

Primer: Kokoš znese N jajc, kjer je $N \sim Po(\lambda)$. Iz vsakega jajca se izleže piščanček z

verjetnostjo p, neodvisno od N.
Naj bo X končno število piščancev. Kakšna je porazdelitev X? V jeziku Izreka 5.4. imamo neodvisne enako porazdeljene indikatorje $I_1, I_2, \ldots$, $P(I_k = 1) = p$. Indikatorji so neodvisni od N in gledamo $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N$. Velja

$$G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s)).$$

Pri tem je $G_{I_1}(s) = q + ps$ in $G_N(s) = e^{-\lambda(1-s)}$. Sledi

$$G_X(s) = e^{-\lambda(1-q-ps)}$$

$$= e^{-\lambda p(1-s)}$$

<u>Sklep</u>: $X \sim Po(\lambda p)$.

Primer: Mečemo kovanec in čakamo na r grbov zaporedoma. Vemo, da ima za $k \leq r$ slučajna spremenljivka X (število potrebnih metov) pogojno na $H_k = \{$prva številka pade na k-tem metu$\}$ pogojno porazdelitev enako porazdelitvi $X+k$. Sledi

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} E(s^X \mid H_k)\, P(H_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} E(s^{X+k}) \cdot P(H_k) + \sum_{k=r+1}^{\infty} s^r P(H_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} s^k G_X(s) \cdot p^{k-1} \cdot q + s^r \cdot p^r$$

Sledi

$$G_X(s) = \frac{s^r p^r}{1 - sq(1 + sp + \cdots + s^{r-1}p^{r-1})}$$

Načeloma iz tega izračunamo

$G_X^{(k)}(0)/k! = P(X = k)$, vendar je komplicirano.

Poskusimo vrej za $r = 2$ in $p = 1/2$

V tem primeru je

$$g_X(s) = \frac{\frac{s^2}{4}}{1 - \frac{s}{2}\left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

$$= \frac{s^2}{4 - 2s - s^2}$$

Dovolj bo, če razvijemo v vrsto funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{4 - 2s - s^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k .$$

Z množenjem ugotovimo, da je

$$c_0 = \frac{1}{4} \quad \text{in}$$

$$c_1 = 1/8$$

ter

$$4c_k - 2c_{k-1} - c_{k-2} = 0 .$$

Nastavek za rešitev te diferenčne enačbe je

$$c_k = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$c_0 = \frac{1}{4} = \alpha + \beta \quad \text{in}$$

$$c_1 = 1/8 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

Rešimo in sledi

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{40} = \frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{40}$$

$$\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{40} = \frac{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})}{40}$$

Sledi

$$c_k = \frac{(5+\sqrt{5})}{40}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k + \frac{(5-\sqrt{5})}{40}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k.$$

Dobimo za $k = 2, 3, \ldots$

$$P(X=k) = c_{k-2}$$

5. 2. Procesi razvejanja

Sir Francis Galton (1822–1911) je leta 1873 postavil naslednje vprašanje: vzemimo viktorijanskega aristokrata. Ta bo imel slučajno število sinov. Vsak od teh bo imel slučajno število sinov, od katerih bo spet vsak imel slučajno število sinov, ... Kolikšna je verjetnost, da bo rodbina tega aristokrata izumrla? Odgovor sta našla F. Galton in H. W. Watson v članku On the probability of extinction of families, Journal of the Royal Anthropological Institute, 1875, 138–144.

Za namene matematične obravnave potrebujemo bolj natančne predpostavke.

Predpostavili bomo:

(i) generacije so simultane.

(ii) število sinov vsakega posameznika v dani generaciji je neodvisno od števila sinov ostalih posameznikov v isti generaciji.

(iii) porazdelitev števila sinov je enaka za vse posameznike.

Označimo število posameznikov v n-ti generaciji z Z_n. Po predpostavmi je $Z_0 = 1$. Naj bodo $\{\xi_{n,k}\}_{n\geq 1, k\geq 1}$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z rodovno funkcijo G. Te bodo predstavljale števila sinov. Definiramo rekurzivno

$$Z_{n+1} = \xi_{n+1,1} + \xi_{n+1,2} + \cdots + \xi_{n+1,Z_n}.$$

Iz konstrukcije sledi, da je Z_n odvisna od $\{\xi_{m,k}\}$ za $m \leq n$, torej je neodvisna od $\xi_{n+1,1}, \xi_{n+1,2}, \ldots$

Po izreku 5.4 je

$$G_{Z_{n+1}}(s) = G_{Z_n}(G(s)).$$

Iz tega sledi z oznako $G_{Z_n} = G_n$.

$$G_1(s) = G(s)$$

$$G_2(s) = G_1(G(s)) = (G \circ G)(s)$$

$$\vdots$$

$$G_n(s) = (G \circ G \circ \cdots \circ G)(s).$$

Ker je kompozitum asociativen, velja

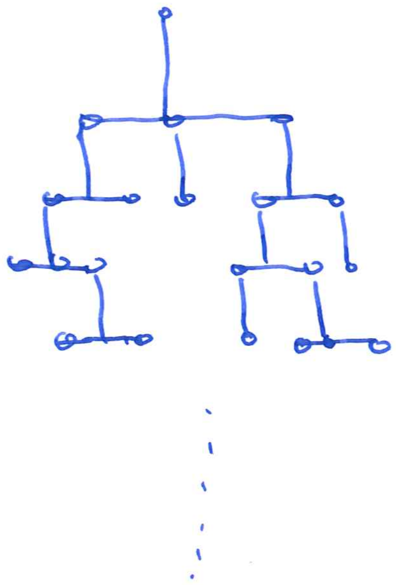
$$\boxed{G_{n+1}(s) = G(G_n(s))}.$$

__Definicija__: Zaporedju slučajnih spremenljivk $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ rečemo __proces razvejanja__ (angl. branching process).

__Opomba__: Pogosto v verjetnosti imenujemo zaporedja med sabo odvisnih slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \dots$ proces.

Proces razvejanja si lahko predstavimo s sliko.

__Slika__:



$Z_0 = 1$

$Z_1 = 3$

$Z_2 = 5$

$Z_3 = 6$

$Z_4 = 5$

Označimo $A = \{$ rodbina izumre $\}$.

Velja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$. Velja

tudi $\{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\}$

(če nihče ne vstane od mrtvih).

Označimo $\eta = P(A)$. Lema 1.2.

pove

$$\eta = P(A) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} G_{Z_n}(0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} G(G_{Z_{n-1}}(0))$$

$$= G\left(\lim_{n\to\infty} G_{Z_{n-1}}(0)\right)$$

$$= G(\eta).$$

Uporabili smo dejstvo, da je

G zvezna na $[-1,1]$ in je

$|G_X(s)| \le 1$.

Verjetnost izumrtja je fiksna točka rodovne funkcije G na intervalu $[0,1]$. Ker je $G(1)=1$, vsaj ena taka fiksna točka obstaja. Ni pa nujno edina.

Katera fiksna točka je prava?

<u>Izrek 5.5</u>: Verjetnost $\eta = P(A)$ je najmanjša fiksna točka funkcije G na intervalu $[0,1]$.

<u>Dokaz</u>: Množica $\{\bar{\eta} : \bar{\eta} = G(\bar{\eta}),\ \bar{\eta} \in [0,1]\}$ je neprazna in zaprta, zato ima najmanjši element na $[0,1]$.

Naj bo $\bar{\eta}$ neka fiksna točka.

Velja

$$0 \leq \bar{\eta}.$$

Ker je G nepadajoča na $[0,1]$, je

$$G(0) \leq G(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$$

$$G(G(0)) \leq G(\bar{\eta}) \leq \bar{\eta}$$

Z iteracijo sledi

$$G_n(0) \leq \bar{\eta}$$

Sledi

$$\eta = \lim_{n \to \infty} G_n(0) \leq \bar{\eta}.$$

Verjetnost η je fiksna točka G, ki je manjša ali enaka vsaki drugi fiksni točki. S tem je dokaz zaključen.

__Primer__: Recimo, da je

$$G(s) = \frac{1+s+s^2+s^3}{4}.$$

Vsak posameznik ima $0, 1, 2, 3$ sinov z enako verjetnostjo. Rešitve enačbe

$$G(s) = \frac{1+s+s^2+s^3}{4} = s$$

so $s = 1$, $s = -1-\sqrt{2}$, $s = -1+\sqrt{2}$.

Na intervalu $[0,1]$ sta fiksni točki $s = 1$ in $s = -1+\sqrt{2}$, torej je

$$\eta = -1 + \sqrt{4} \doteq 0.41.$$

Kompozitum $G \circ G \circ \cdots \circ G$ je večinoma težko ali nemogoče izračunati. Vzemimo

$$G(s) = \frac{p}{1-qs}.$$

Hitro ugotovimo, da bo

$$G_n(s) = \frac{a_n - b_n s}{c_n - d_n s}.$$

Veljalo bo

$$G_{n+1}(s) = \frac{a_n - b_n \cdot \frac{p}{1-qs}}{c_n - d_n \frac{p}{1-q}}.$$

Zmnožimo in sledi

$$a_{n+1} = a_n - p b_n$$

$$b_{n+1} = q a_n$$

Ker je $G_0(s) = 1$, je $a_0 = 0$ in $b_0 = -1$

Prepišemo v matrični obliki.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Privzemimo najprej, da je $p \neq q$.

Zapišemo lahko

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -q & p \end{pmatrix} \frac{1}{p-q}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1, & -p \\ q, & 0 \end{pmatrix}.$$

S to diagonalizacijo lahko izračunamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -q & p \end{pmatrix} \frac{1}{p-q}$$

Z množenjem sledi

$$\begin{pmatrix} 1 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p^{n+1} - q^{n+1}, & -p^{n+1} + pq^n \\ qp^n - q^{n+1}, & -qp^n + pq^n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{p-q}$$

Sledi

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p^{n+1} - q^{n+1} \\ q(p^n - q^n) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{p-q}$$

Podobno dobimo

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -p \\ q, & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p^{n+1} - q^{n+1} \\ q(p^n - q^n) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{p-q}$$

Torej je

$$G_n(s) = \frac{p(p^n - q^n - qs(p^{n-1} - q^{n-1}))}{p^{n+1} - q^{n+1} - qs(p^n - q^n)}.$$

Opazimo: če je $p > q$, je

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = 1,$$

če je $p < q$, je

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \frac{p}{q} < 1.$$

Fiksni točki $G(s) = \frac{p}{1-qs} = s$

sta

$$s_{1,2} = \frac{1 \mp |1-2p|}{2q}$$

Če je $p < q$, je $p < 1/2$, torej je $p/q < 1$ fiksna točka.

<u>Opomba</u>: Za $p = q = 1/2$ dobimo

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns}.$$

in posledično

$$\eta = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

<u>Izrek 5.6</u>: Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z rodovno funkcijo G. Naj bo $\mu = \lim_{s \uparrow 1} G'(s)$.

(i) če je $\mu < 1$, je $\eta = 1$.

(ii) če je $\mu > 1$, je $\eta \in [0, 1)$.

(iii) če je $\mu = 1$ in je $G(s) \neq s$, je $\eta = 1$.

Dokaz:

(i) Če je $\mu < 1$, je $G'(s) \leq \mu < 1$ za $s \in (0,1)$. Po Lagrangevem izreku je za $s \in (0,1)$

$$1 - G(s) = G'(\xi)(1-s) \qquad \xi \in (s,1)$$

$$\leq \mu(1-s)$$

$$< 1-s,$$

torej je $G(s) > s$ in s ni fiksna točka.

(ii) Obstaja $s_0 \in (0,1)$, da za $s \in (s_0,1)$ velja $G'(s) > 1$.

$$1 - G(s_0) = G'(\xi)(1-s)$$

$$> 1 - s_0.$$

Sledi $G(s_0) < s_0$ in $G(0) \geq 0$. Zaradi zveznosti obstaja fiksna točka $\eta \in [0, s_0)$.

(iii) Če je $G(s) \neq s$ je ali $G(s) = 1$, ali pa je G strogo konveksna na $(0,1)$.

V prvem primeru je očitno $\eta = 1$.

V drugem primeru je G' strogo naraščajoča na $(0,1)$, kar pomeni $G'(s) < 1$ za $s \in (0,1)$. Sledi

$$1 - G(s) = G'(\xi)(1-s)$$

$$< 1 - s \quad \text{ali}$$

$$G(s) > s \quad \text{za} \quad s \in (0,1).$$

5.3. Panjerjeva rekurzija

V zavarovalništvu nas zanima porazdelitev vsote $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Spremenljivko N razumemo kot število škod, slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ pa kot višine škod. Vsota je potem celotna škoda. Za namene upravljanja s tveganji je treba vedeti porazdelitev. Če so $X_1, X_2, \ldots$ enako porazdeljene in med sabo neodvisne ter neodvisne od N, potem je

$$
\begin{aligned}
& G_{X_1 + \ldots + X_N}(s) \\
& \qquad = G_N(G_{X_1}(s)).
\end{aligned}
$$

Vendar je pogosto težko izluščiti koeficiente v analitični obliki. Lahko pa izpeljemo rekurzije.

Definicija: Slučajna spremenljivka N ima porazdelitev Panjerjevega razreda, če za konstanti $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$P(N=n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P(N=n-1)$$

za $n = 1, 2, \ldots$.

Opomba: Veljati mora $a+b > 0$.

Če obe strani zgornje enačbe pomnožimo z s^n in seštejemo od $n=1$ do ∞, dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) s^n = G_N(s) - P(N=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) P(N=n-1) s^n$$

$$= as \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) s^{n-1}$$

$$+ b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) \frac{s^n}{n}$$

$$= as\, G_N(s)$$

$$+ b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n-1) \int_0^s u^{n-1}\, du$$

$$= as\, G_N(s) + b \cdot \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n-1)\, u^{n-1}\, du$$

$$= as\, G_N(s) + b \int_0^s G_N(u)\, du.$$

Vrstni red seštevanja in integriranja za $|s| < 1$ lahko zamenjamo zaradi absolutne in enakomerne konvergence vrste. Sledi

$$G_N(s) - P(N = 0) = as\, G_N(s) + b \int_0^s G_N(u)\, du.$$

Odvajamo za $|s| < 1$ in dobimo

$$G_N'(s) = as\, G_N'(s) + (a+b)\, G_N(s)$$

ali

$$G_N'(s)\,(1 - as) = (a+b)\, G_N(s).$$

Označimo $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ter

$$f_r = P(X_1 = r)$$
$$g_r = P(X = r)$$
$$p_r = P(N = r)$$

za $r = 0, 1, \dots\dots$ Vemo, da je

$$G_X(s) = G_N(G_{X_1}(s));$$

Odvajamo in sledi

$$G_X'(s) = G_N'(G_{X_1}(s))\, G_{X_1}'(s)$$

Množimo na levi in desni z $(1 - a\, G_{X_1}(s))$ in sledi

$$\boxed{G_X'(s)(1 - a\, G_{X_1}(s)) = (a+b)\, G_X(s)\, G_{X_1}'(s)}$$

Računamo

$$P(X=0) = P(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot f_0^n$$

$$= G_N(f_0)$$

$$= g_0$$

Iz Analize 1 vemo, da je

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

kjer je $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$.

V formuli v okviru izenačimo koeficiente na levi in desni pri potenci s^n. Dobimo:

$$L: \quad (n+1) g_{n+1} - a \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot g_{n-k+1} (n-k+1)$$

$$D: \quad (a+b) \sum_{k=0}^{n} (k+1) f_{k+1} g_{n-k}$$

Sledi

$$(n+1) g_{n+1} - a \cdot f_0 g_{n+1} (n+1)$$

$$= a \sum_{k=1}^{n} f_k g_{n-k+1} (n-k+1)$$

$$+ (a+b) \sum_{k=0}^{n} (k+1) f_{k+1} g_{n-k}$$

$$= a \sum_{k=1}^{n+1} f_k g_{n-k+1} (n-k+1)$$

(dodali smo 0)

$$+ (a+b) \sum_{k=1}^{n+1} k f_k g_{n-k+1}$$

(premaknili smo števec)

$$= a (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} f_k g_{n-k+1}$$

$$+ b \sum_{k=1}^{n+1} k f_k g_{n-k+1}$$

Delimo levo in desno stran z

$(n+1)(1-a f_0)$ in sledi

$$\boxed{g_{n+1} = \frac{1}{1-af_0} \sum_{k=1}^{n+1} \left(a + \frac{b\cdot k}{n+1}\right) f_k\, g_{n-k+1}}$$

Na desni je najvišji indeks pri g_n enak g_n. Izpeljali smo rekurzivno enačbo za g_n!

Tej rekurziji se reče Panjerjeva rekurzija

Opombe:

(i) V Panjerjev razred spada vrsta znanih porazdelitev.

- $a = 0,\ b > 0 \Rightarrow$ Poisson.
- $a = -p/q,\ b = \frac{(M+1)p}{q} \Rightarrow$ Binomska s parametri p in M.
- $a = q,\ b = (m-1)q \Rightarrow$ Negativna binomska - m.

(ii) Izvedenke Panjerjeve rekurzije se dejansko uporabljajo v praksi.

(iii) Verjetnosti $f_0, f_1, \ldots$ so aproksimativno znane iz prakse.

Za $p_0, p_1,$ se predpostavi eno od znanih porazdelitev, tipično Poissonovo.