FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Matematika

Verjetnost

1. kolokvij

30. 11. 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V dobro premešanem kupu 52 kart je 13 src in 13 pikov.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da so vsa srca med vrhnjimi 27, vsi piki pa med spodnjimi 27 kartami?

Rešitev:

Prvi način. *Kup razdelimo na vrhnjih 25, srednji 2 in spodnjih 25 kart. Če se zgodi dani dogodek, je število pikov in src v posameznem delu kupa natančno določeno že s številom pikov in src v srednjem delu z dvema kartama. Tam pa imamo naslednje možnosti:*

- *brez src in pikov – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{\binom{25}{13}^2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{24}{12}}{\binom{50}{25}}\,;$$

- *natanko eno srce in brez pikov ali pa natanko en pik in brez src – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{2 \cdot \binom{25}{12}\binom{2}{1}\binom{25}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 26}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{25}{13}}{\binom{50}{25}} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 26}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{25}{12}}{\binom{50}{25}}\,;$$

- *eno srce in en pik – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{2 \cdot \binom{25}{12}^2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{13 \cdot 13}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{50}{25}}\,;$$

- *dve srci ali dva pika – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{2 \cdot \binom{25}{11}\binom{25}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = 2 \cdot \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{14}}{\binom{50}{25}} = 2 \cdot \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{12}}{\binom{50}{25}}\,.$$

Ker se te možnosti med seboj izključujejo, je verjetnost danega dogodka vsota zgornjih verjetnosti, ki je enaka

$$\frac{61}{7} \cdot \frac{(25!)^2 \cdot 26!}{(12!)^2 \cdot 52!} \doteq 4{,}57 \cdot 10^{-8}\,.$$

Drugi način. *Srcem pripišemo zgornjo, pikom pa spodnjo polovico kupa, nakar ločimo možnosti, ali katero srce oziroma pik prestopi pripisano polovico kupa:*

- *vsa srca so v zgornji, vsi piki pa v spodnji polovici – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{\binom{26}{13}^2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}}\,;$$

- *srce prestopi, pik pa ne, ali pa obratno – verjetnost tega dogodka je*

$$2 \cdot \frac{\binom{26}{12}\binom{25}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{13}{52} \cdot \frac{\binom{26}{14}}{\binom{51}{26}} = \frac{13}{52} \cdot \frac{\binom{26}{12}}{\binom{51}{25}}\,;$$

- *prestopi tako eno srce kot tudi en pik – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{\binom{25}{12}^2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{13 \cdot 13}{52 \cdot 51} \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{50}{25}} .$$

Tudi ti dogodki se med seboj izključujejo in njihova vsota pride ista kot prej.

Tretji način. *Ločimo glede na število src med srednjima dvema kartama:*

- *brez srca – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{\binom{25}{13}\binom{27}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{\binom{26}{12}}{\binom{52}{25}} = \frac{\binom{26}{14}}{\binom{52}{27}} ;$$

- *natanko eno srce – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{2 \cdot \binom{25}{12}\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = 2 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{51}{25}} = 2 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{51}{26}} ;$$

- *dve srci – verjetnost tega dogodka je*

$$\frac{\binom{25}{11}\binom{25}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{14}}{\binom{50}{25}} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{12}}{\binom{50}{25}} .$$

Tudi ti dogodki se med seboj izključujejo in njihova vsota pride ista kot prej.

b. (5) Recimo, da so res vsa srca med vrhnjimi 27 in vsi piki med spodnjimi 27 kartami. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je 26. karta z vrha srce, 26. karta z dna (tj. 27. karta z vrha) pa pik?

Rešitev: Dogodek, da so vsa srca med vrhnjimi 27 in vsi piki med spodnjimi 27 kartami, obenem pa je 26. karta z vrha srce, 26. karta z dna (tj. 27. karta z vrha) pa pik, se ujema z dogodkom, da je 12 src med zgornjimi 25 kartami, sledita srce in pik, med spodnjimi 25 kartami pa je 12 pikov. Verjetnost tega dogodka je

$$\frac{\binom{25}{12}^2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} = \frac{13 \cdot 13}{\binom{52}{2}} \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{50}{25}} ,$$

iskana pogojna verjetnost pa je (če se opremo na drugi način rešitve prejšnje točke)

$$\frac{\binom{25}{12}^2}{\binom{26}{13}^2 + 2 \cdot \binom{26}{12}\binom{25}{13} + \binom{25}{12}^2} = \frac{1}{\binom{26}{13}^2 + 2 \cdot \frac{26}{14} + 1} = \frac{7}{61} \doteq 0{,}115 .$$

2. (20) Pošten kovanec mečemo n-krat z $n \geq 3$. Naj bo A dogodek, da se v teh n metih pojavi vzorec GŠŠ. Meti so med sabo neodvisni.

a. (10) Definirajte dogodke

$$A_i = \{\text{meti } i,\ i+1,\ i+2 \text{ so enaki GŠŠ}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Kolikšne so možne verjetnosti

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right)$$

za $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ in $r \leq n-2$?

Rešitev: če imata množici $\{i, i+1, i+2\}$ in $\{j, j+1, j+2\}$ za $i \neq j$ neprazen presek, je $P(A_i \cap A_j) = 0$. Verjetnost preseka bo pozitivna, če bodo množice $\{i_k, i_k+1, i_k+2\}$ disjunktne za $k = 1, 2, \ldots, r$. To pomeni, da je $3r \leq n$. Zaradi neodvisnosti je

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3r}.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost dogodka A. Vsot vam ni treba poenostavljati.

Namig: da preštejete izbire množic $\{i, i+1, i+2\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, ki se ne prekrivajo, združite vsako od izbranih množic v en sam element.

Rešitev: velja, da je $A = \cup_{i=1}^{n-2} A_i$. Za $3r \leq n$ moramo prešteti, na koliko načinov lahko izberemo r disjunktnih podmnožic treh zaporednih števil. Mislimo si lahko, da izberemo r števil izmed $n-2r$ števil in vsakemu izbranemu številu dodamo še dve. Torej je izbir $\binom{n-2r}{r}$. Po formuli za vključitve in izključitve dobimo

$$P(A) = \sum_{r;\, 3r \leq n} (-1)^{r-1} \binom{n-2r}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{3r}.$$

3. (20) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [1]

a. (10) V igri zmaga igralec, ki prvi izvleče belo kroglico. Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

Rešitev: označimo $p = a/(a+b)$ in $q = b/(a+b)$. Ker kroglice vračamo, so posamezne izbire med sabo neodvisne. Če označimo z X število kroglic do vključno prve bele, je $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Računamo

$$\begin{aligned} P(\textit{zmaga } A) &= P(X = 3k+1 \textit{ za neki } k \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 3k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{3k} p \\ &= \frac{p}{1-q^3} \\ &= \frac{a(a+b)^2}{(a+b)^3 - b^3} \\ &= \frac{(a+b)^2}{a^2 + 3ab + 3b^2}\,. \end{aligned}$$

Lahko pa tudi razmislimo, da lahko igralec A zmaga že v prvi rundi ali pa najprej vsi trije izvlečejo črno kroglico, nakar se vse začne na novo in v tem novem poteku A zmaga. Tako dobimo

$$P(\textit{zmaga } A) = p + q^3\, P(\textit{zmaga } A)\,.$$

Ko razrešimo, dobimo isti rezultat kot prej. Podobno dobimo

$$P(\textit{zmaga } B) = \frac{pq}{1-q^3} = \frac{ab(a+b)}{(a+b)^3 - b^3} = \frac{b(a+b)}{a^2 + 3ab + 3b^2}$$

in

$$P(\textit{zmaga } C) = \frac{pq^2}{1-q^3} = \frac{ab^2}{(a+b)^3 - b^3} = \frac{b^2}{a^2 + 3ab + 3b^2}\,.$$

b. (10) Spremenimo pravila igre tako, da vsak, ki izvleče črno kroglico, to vrne in doda še eno črno kroglico. Izračunajte verjetnost dogodka

$$A_n = \{\text{igra se ne konča do vključno } n\text{-tega koraka}\}\,.$$

Utemeljite, da je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, in dokažite, da je

$$P\left(\{\text{igra se nikoli ne konča}\}\right) = P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0\,.$$

[1] Problem iz knjige Christian Huygens: *De ratiociniis in ludo aleae*, 1657. Christian Huygens (1629–1695), nizozemski matematik.

Namig: lahko uporabite neenačbo $1 - x \le e^{-x}$.

Rešitev: dogodki $A_1, A_2, \ldots$ *so padajoči in velja*

$$\{\textit{igra se nikoli ne konča}\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \,.$$

Torej je

$$P(\{\textit{igra se nikoli ne konča}\}) = \lim_{n\to\infty} A_n \,,$$

se pravi, da je dovolj dokazati, da je $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. *Velja*

$$P(A_n) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+1}{a+b+1} \cdots \frac{b+n-1}{a+b+n-1} \,.$$

Da je limita enaka nič, lahko vidimo na vsaj dva načina. Lahko zapišemo in ocenimo

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a}{a+b+k-1}\right) \\ &\le \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a+b+k-1}\right) \,. \end{aligned}$$

Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a+b+k-1}$ *divergira, je res* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. *Lahko pa tudi izračunamo*

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \frac{(b+n-1)!\,(a+b-1)!}{(b-1)!(a+b+n-1)!} \\ &= \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!} \, \frac{1}{(b+n)(b+n+1)\cdots(b+n+a-1)} \,, \end{aligned}$$

od koder se prav tako vidi, da je $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

4. (20) Standardno kocko n-krat vržemo, meti so neodvisni. Označimo jih z $1, 2, \ldots, n$. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ označimo z A_k dogodek, da je v k-tem metu prvič padla ena pika, z B_l pa označimo dogodek, da je v l-tem metu zadnjič padlo šest pik.

a. (5) Za vse k in l izračunajte $P(A_k)$ in $P(B_l)$.

Rešitev: Dogodek A_k pomeni, da v prvih $k-1$ metih ni bilo enice, da pa je padla v k-tem metu; torej je $P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Dogodek B_l pa pomeni, da v zadnjih prvih $n-l$ metih ni bilo šestice, da pa je padla v l-tem metu; torej je $P(B_l) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-l}$.

b. (15) Določite, za katere k in l sta dogodka A_k in B_l neodvisna.

Rešitev: Ločimo tri primere.

- *Za $k < l$ dogodek $A_k \cap B_l$ pomeni, da v prvih $k-1$ metih ni bilo enice, v k-tem metu je padla enica, v l-tem metu je padla šestica in v zadnjih $n-l$ metih ni bilo šestice. Torej je $P(A_k \cap B_l) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-l}$, kar je enako $P(A_k)\,P(B_l)$, torej sta dogodka A_k in B_l neodvisna.*
- *Za $k > l$ dogodek $A_k \cap B_l$ pomeni, da v prvih $l-1$ metih ni bilo enice, v l-tem metu je padla šestica, v vmesnih $k-l-1$ metih ni bilo niti enice niti šestice, v k-tem metu je padla enica, v zadnjih $n-k$ metih pa ni bilo šestice. Torej je $P(A_k \cap B_l) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k+l-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2$, kar ni enako $P(A_k)\,P(B_l)$, torej sta dogodka A_k in B_l odvisna.*
- *Za $k = l$ je dogodek $A_k \cap B_l$ nemogoč, torej je $P(A_k \cap B_l) = 0$, kar spet pomeni, da sta dogodka A_k in B_l odvisna.*

5. (20) Iz posode, v kateri je sprva a belih in $b \geq 2$ črnih kroglic, na slepo vlečemo kroglice. Vsakič, ko izvlečemo kroglico, jo ne glede na njeno barvo zamenjamo z belo kroglico. Vlečenja so med seboj neodvisna. Naj bo X število izvlečenih kroglic do vključno prve črne, Y pa naj bo število kroglic med prvo in drugo izvlečeno črno, vključno z drugo, ne pa tudi s prvo črno kroglico.

a. (10) Poiščite skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: možne vrednosti slučajnega vektorja (X,Y) so vsi celoštevilski pari (k,l) s $k,l \geq 1$. Dogodek $\{X=k, Y=l\}$ se zgodi, če najprej izvlečemo $k-1$ belih kroglic, nato črno kroglico, nato $l-1$ belih kroglic in nazadnje črno kroglico. Torej velja

$$P(X=k,Y=l) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k-1} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \left(\frac{a+1}{a+b}\right)^{l-1} \cdot \frac{b-1}{a+b},$$

kar se poenostavi v

$$P(X=k,Y=l) = \frac{a^{k-1}(a+1)^{l-1}b(b-1)}{(a+b)^{k+l}}.$$

Z drugimi besedami, X in Y sta neodvisni z $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{b}{a+b}\right)$ in $Y \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{b-1}{a+b}\right)$.

b. (10) Izračunajte verjetnost $P(X \geq Y)$.

Rešitev: z uporabo neodvisnosti računamo

$$\begin{aligned}
P(X \geq Y) &= \sum_{k \geq l \geq 1} P(X=k,Y=l) \\
&= \sum_{k \geq l \geq 1} P(X=k)P(Y=l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} P(Y=l) \sum_{k=l}^{\infty} P(X=k) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} P(Y=l) \left(\frac{a}{a+b}\right)^{l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{b-1}{a+b}\right) \left(\frac{a+1}{a+b}\right)^{l-1} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{l-1} \\
&= \frac{(b-1)(a+b)}{(a+b)^2 - a(a+1)} \\
&= \frac{(b-1)(a+b)}{b^2+2ab-a}.
\end{aligned}$$

6. (20) V skrinji je n kovancev. Med njimi je a zlatnikov, b kovancev cesarja Bazilija in c zlatnikov cesarja Bazilija (seveda je vsak zlatnik kovanec). Iz skrinje drugega za drugim na slepo in brez vračanja jemljemo kovance, dokler ni zunaj tako vsaj en zlatnik kot tudi vsaj en kovanec cesarja Bazilija. Naj bo X število kovancev, ki smo jih vzeli iz skrinje.

a. (15) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X. Posebej zapišite, katere vrednosti lahko zavzame.

Rešitev: če definiramo $M := n - \min\{a, b\} + 1$, lahko slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti $1, 2, \ldots, M$, če je $c > 0$, in $2, 3, \ldots, M$, če je $c = 0$. Za izračun porazdelitve za $k = 1, 2, 3, \ldots$ definirajmo naslednje dogodke:

$$
\begin{aligned}
A_k &:= \{k\text{-ti kovanec je zlatnik}\}\,, \\
A'_k &:= \{\text{med prvimi } k \text{ kovanci ni zlatnikov}\}\,, \\
B_k &:= \{k\text{-ti kovanec pripada Baziliju}\}\,, \\
B'_k &:= \{\text{nobeden izmed prvih } k \text{ kovancev ne pripada Baziliju}\}\,.
\end{aligned}
$$

Posebej definirajmo še A'_0 in B'_0 kot gotova dogodka. Nadaljujemo lahko na več načinov, pri vseh pa upoštevamo standardna dogovora, da je $\binom{0}{0} = 1$ in $\binom{m}{j} = 0$, brž ko je j izven množice $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Prvi način. *Dogodek $\{X = k\}$ je disjunktna unija naslednjih treh dogodkov:*

- $(A'_{k-1} \cup B'_{k-1}) \cap (A_k \cap B_k)$, *čigar verjetnost je*

$$\frac{\binom{n-a}{k-1} + \binom{n-b}{k-1} - \binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{c}{n-k+1}\,;$$

- $(A'_{k-1} \setminus B'_{k-1}) \cap (A_k \setminus B_k)$, *čigar verjetnost je*

$$\frac{\binom{n-a}{k-1} - \binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{a-c}{n-k+1}\,;$$

- $(B'_{k-1} \setminus A'_{k-1}) \cap (B_k \setminus A_k)$, *čigar verjetnost je*

$$\frac{\binom{n-b}{k-1} - \binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{b-c}{n-k+1}\,;$$

Seštejemo in dobimo

$$P(X = k) = \frac{a\binom{n-a}{k-1} + b\binom{n-b}{k-1} - (a+b-c)\binom{n-a-b+c}{k-1}}{(n-k+1)\binom{n}{k-1}}\,.$$

V skladu z omenjenima standardnima dogovoroma za binomske simbole je ta verjetnost pozitivna le za $k = 1, 2, \ldots, M$, če je $c > 0$, in za $k = 2, 3, \ldots, M$, če je $c = 0$.

Drugi način. *Definirajmo še dogodek*

$$D_k := \{k\text{-ti kovanec je bodisi zlatnik bodisi pripada Baziliju, ni pa oboje}\}$$

in izrazimo

$$\{X=k\} = \big((A'_{k-1}\cap A_k)\cup(B'_{k-1}\cap B_k)\big) \setminus (A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap D_k)\,.$$

Ker je $D_k \subseteq A_k \cup B_k$*, je tudi* $A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap D_k \subseteq (A'_{k-1}\cap A_k)\cup(B'_{k-1}\cap B_k)$*. Torej je*

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(A'_{k-1}\cap A_k) + P(B'_{k-1}\cap B_k) - P(A'_{k-1}\cap A_k\cap B'_{k-1}\cap B_k) \\
&\qquad - P(A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap D_k) \\
&= \frac{\binom{n-a}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{a}{n-k+1} + \frac{\binom{n-b}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{b}{n-k+1} - \frac{\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{c}{n-k+1} \\
&\qquad - \frac{\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{a+b-2c}{n-k+1} \\
&= \frac{\binom{n-a}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{a}{n-k+1} + \frac{\binom{n-b}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{b}{n-k+1} - \frac{\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{a+b-c}{n-k+1}\,,
\end{aligned}$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Tretji način. *Začnemo tako kot pri drugem načinu, nakar opazimo, da sta si dogodka* $A_k\cap B_k$ *in* D_k *disjunktna in velja* $(A_k\cap B_k)\cup D_k = A_k\cup B_k$*. Torej sta si tudi dogodka* $A'_{k-1}\cap A_k\cap B'_{k-1}\cap B_k$ *in* $A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap D_k$ *disjunktna in velja* $(A'_{k-1}\cap A_k\cap B'_{k-1}\cap B_k)\cup(A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap D_k) = A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap(A_k\cup B_k)$*. Sledi*

$$P(X=k) = P(A'_{k-1}\cap A_k) + P(B'_{k-1}\cap B_k) - P\big(A'_{k-1}\cap B'_{k-1}\cap(A_k\cup B_k)\big)\,.$$

Verjetnosti teh dogodkov lahko sedaj izračunamo malo drugače, in sicer tako, da si predstavljamo, da kovance najprej povsem naključno uredimo, nakar jih vlečemo skladno s tem vrstnim redom. Ko urejamo, pa je pri vsakem dogodku, ki ga potrebujemo, dovolj ločiti le kovance določene vrste (recimo zlatnike) od ostalih. Dobimo

$$P(X=k) = \frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}} + \frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}} - \frac{\binom{n-k}{a+b-c-1}}{\binom{n}{a+b-c}}\,.$$

Četrti način. *Za* $k=0,1,2,\ldots$ *izrazimo* $\{X>k\} = A'_k\cup B'_k$*, nakar izračunamo*

$$\begin{aligned}
P(X>k) &= P(A'_k) + P(B'_k) - P(A'_k\cap B'_k) \\
&= \frac{\binom{n-a}{k} + \binom{n-b}{k} - \binom{n-a-b+c}{k}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{\binom{n-k}{a}}{\binom{n}{a}} + \frac{\binom{n-k}{b}}{\binom{n}{b}} - \frac{\binom{n-k}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}}\,.
\end{aligned}$$

Za $k=1,2,3,\ldots$ *je seveda*

$$P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)\,,$$

kar lahko izračunamo bodisi kot

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{\binom{n-a}{k-1}+\binom{n-b}{k-1}-\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \\
&\qquad - \frac{\binom{n-a}{k}+\binom{n-b}{k}-\binom{n-a-b+c}{k}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{\binom{n-a}{k-1}+\binom{n-b}{k-1}-\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \\
&\qquad - \frac{\frac{n-a-k+1}{k}\binom{n-a}{k-1}+\frac{n-b-k+1}{k}\binom{n-b}{k-1}-\frac{n-a-b+c-k+1}{k}\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\frac{n-k+1}{k}\binom{n-1}{k-1}} \\
&= \frac{a\binom{n-a}{k-1}+b\binom{n-b}{k-1}-(a+b-c)\binom{n-a-b+c}{k-1}}{(n-k+1)\binom{n}{k-1}}\,,
\end{aligned}
$$

kar je isto kot pri prvih dveh načinih, bodisi kot

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{\binom{n-k+1}{a}-\binom{n-k}{a}}{\binom{n}{a}}+\frac{\binom{n-k+1}{b}-\binom{n-k}{a}}{\binom{n}{b}}-\frac{\binom{n-k+1}{a+b-c}-\binom{n-k}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}} \\
&= \frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}}+\frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}}-\frac{\binom{n-k}{a+b-c-1}}{\binom{n}{a+b-c}}\,,
\end{aligned}
$$

kar je isto kot pri tretjem načinu.

b. (5) Naj bo F dogodek, da je zadnji kovanec, ki smo ga vzeli iz skrinje, zlatnik cesarja Bazilija. Za vsak k, za katerega ima izraz pomen, izračunajte $P(F \mid X=k)$.

Rešitev: Velja $F\cap\{X=k\}=(A'_{k-1}\cup B'_{k-1})\cap(A_k\cap B_k)$, *torej je*

$$
\begin{aligned}
P\big(F\cap\{X=k\}\big) &= \frac{\binom{n-a}{k-1}+\binom{n-b}{k-1}-\binom{n-a-b+c}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{c}{n-k+1} \\
&= \left(\frac{\binom{n-k+1}{a}}{\binom{n}{a}}+\frac{\binom{n-k+1}{b}}{\binom{n}{b}}-\frac{\binom{n-k+1}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}}\right)\frac{c}{n-k+1} \\
&= \frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}}\cdot\frac{c}{a}+\frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}}\cdot\frac{c}{b}-\frac{\binom{n-k}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}}\cdot\frac{c}{a+b-c}\,.
\end{aligned}
$$

Za $n = 1, 2, \ldots, n - \min\{a, b\} + 1$ *torej velja*

$$
\begin{aligned}
P(F \mid X = k) &= \frac{c\left[\binom{n-a}{k-1} + \binom{n-b}{k-1} - \binom{n-a-b+c}{k-1}\right]}{a\binom{n-a}{k-1} + b\binom{n-b}{k-1} - (a+b-c)\binom{n-a-b+c}{k-1}} \\
&= \frac{\frac{\binom{n-k+1}{a}}{\binom{n}{a}} + \frac{\binom{n-k+1}{b}}{\binom{n}{b}} - \frac{\binom{n-k+1}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}}}{\frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}} + \frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}} - \frac{\binom{n-k}{a+b-c-1}}{\binom{n}{a+b-c}}} \cdot \frac{c}{n-k+1} \\
&= \frac{\frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}} \cdot \frac{c}{a} + \frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}} \cdot \frac{c}{b} - \frac{\binom{n-k}{a+b-c}}{\binom{n}{a+b-c}} \cdot \frac{c}{a+b-c}}{\frac{\binom{n-k}{a-1}}{\binom{n}{a}} + \frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}} - \frac{\binom{n-k}{a+b-c-1}}{\binom{n}{a+b-c}}}\,.
\end{aligned}
$$

Opomba. *Za* $k = 1$ *razberemo očiten rezultat* $P(F \mid X = 1) = 1$.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

1. kolokvij

30. 11. 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

4. (20) Pošten kovanec mečemo toliko časa, da dobimo grb, ki mu sledi številka. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni. Naj bo X število metov, vključno z zadnjo številko.

a. (15) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, \ldots$ Dogodek, da je $X = k$, pa je unija dogodkov A_{jk}, da v prvih j metih pade številka, v naslednjih $k - j - 1$ metih grb in v k-tem metu številka, ko j preteče vrednosti $0, 1, \ldots, k - 2$. Dogodki A_{jk} so paroma disjunktni in vsak ima verjetnost 2^{-k}. Sledi:

$$P(X = k) = \frac{k-1}{2^k} \,.$$

b. (5) Za vse pare (j, k), kjer sta j in k naravni števili in $j < k$, izračunajte pogojno verjetnost dogodka, da v j-tem metu pade grb, glede na dogodek $\{X = k\}$.

Rešitev: gre za pogojno verjetnost

$$P\big(A_{0k} \cup A_{1k} \cup \cdots \cup A_{j-1,k} \bigm| X = k\big) = \frac{P(A_{0k} \cup A_{1k} \cup \cdots \cup A_{j-1,k})}{P(X = k)} = \frac{j}{k-1} \,.$$