IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

1. KOLOKVIJ

27. NOVEMBER 2020

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Na okensko polico povsem naključno razporedimo b begonij, f fuksij in k kalanhoj.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da so vse begonije skupaj, prav tako pa tudi vse fuksije?

Rešitev: Če vse cvetlice med seboj ločimo, je vseh možnih razporeditev $(b+f+k)!$ in vse so enako verjetne. Prešteti moramo še vse razporeditve, pri katerih so begonije in fuksije skupaj. Le-te lahko obravnavamo kot dva bloka; skupaj s kalanhojami je to $k+2$ enot. Nato pa moramo še razporediti begonije in fuksije znotraj bloka. Dobimo, da je možnih razporeditev $(k+2)!\,b!\,f!$. Iskana verjetnost je torej enaka

$$\frac{(k+2)!\,b!\,f!}{(b+f+k)!}\,.$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da niti za begonije niti za fuksije niti za kalanhoje ne velja, da so skupaj?

Rešitev: Označimo z B, F in K dogodke, da so begonije, fuksije oziroma kalanhoje skupaj. Po načelu vključitev in izključitev je iskana verjetnost enaka

$$\begin{aligned}
P(B^c \cap F^c \cap K^c) &= 1 - P(B) - P(F) - P(K) \\
&\qquad + P(B \cap F) + P(B \cap K) + P(F \cap K) - P(B \cap F \cap F) \\
&= \frac{1}{(b+f+k)!}\Big[(b+f+k)! \\
&\qquad - (f+k+1)!\,b! - (b+k+1)!\,f! - (b+f+1)!\,k! \\
&\qquad + (k+2)!\,b!\,f! + (f+2)!\,b!\,k! + (b+2)!\,f!\,k! - 3!\,b!\,f!\,k!\Big]\,.
\end{aligned}$$

2. (20) V kolektivu je n delavcev, med katerimi je tudi Zdravko. Vsi opravijo test za novi koronavirus SARS-Cov-2. Pri okuženih je test pozitiven z verjetnostjo a, pri neokuženih pa z verjetnostjo $1-b$. Številu a pravimo *občutljivost*, številu b pa *specifičnost* testa. Vsak od delavcev je okužen z verjetnostjo p, neodvisno od vseh ostalih. Privzamemo še, da so testiranja posameznih oseb med seboj neodvisna.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da je Zdravkov test pozitiven?

Rešitev: Označimo s K_Z dogodek, da je Zdravko okužen, s T_Z pa dogodek, da je Zdravkov test pozitiven. Tedaj je $P(K_Z)=p$, $P(T_Z \mid K_Z)=a$ in $P(T_Z \mid K_Z^c)=1-b$. Po izreku o popolni verjetnosti je

$$P(T_Z) = P(T_Z \mid K_Z)\, P(K_Z) + P(T_Z \mid K_Z^c)\, P(K_Z^c) = ap + (1-b)(1-p)\,.$$

b. (15) Izkaže se, da je bilo pozitivnih natanko k delavcev, a ni znano, kateri so to bili. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Zdravko okužen?

Rešitev:

Prvi način. *Pri vsakem delavcu je izvid pozitiven z verjetnostjo $t := ap + (1-b)(1-p)$ in negativen z verjetnostjo $1-t = a(1-b)+bp$. Nadalje naj bo T_k dogodek, da je pozitivnih natanko k delavcev. Zaradi neodvisnosti je*

$$P(T_k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\,.$$

Za iskano pogojno verjetnost $P(K_Z \mid T_k)$ je treba izračunati še

$$\begin{aligned} P(K_Z \cap T_k) &= P(K_Z \cap T_Z \cap T_k) + P(K_Z \cap T_Z^c \cap T_k) \\ &= P(K_Z)\, P(T_Z \mid K_Z)\, P(T_k \mid K_Z \cap T_Z) \\ &\qquad + P(K_Z)\, P(T_Z^c \mid K_Z)\, P(T_k \mid K_Z \cap T_Z^c)\,. \end{aligned}$$

Označimo s T_l' dogodek, da je, če izvzamemo Zdravka, izvid pozitiven pri natanko l delavcih; posebej definirajmo še T_{-1}' kot nemogoč dogodek. Če je Zdravkov izvid pozitiven, se dogodek T_k ujema z dogodkom T_{k-1}' in iz neodvisnosti dobimo $P(T_k \mid K_Z \cap T_Z) = P(T_{k-1}' \mid K_Z \cap T_Z) = P(T_{k-1}') = \binom{n-1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-k}$. Če pa je Zdravkov izvid negativen, se dogodek T_k ujema z dogodkom T_k', zato je $P(T_k \mid K_Z \cap T_Z^c) = P(T_k' \mid K_Z \cap T_Z^c) = P(T_k') = \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k-1}$. Sledi

$$P(K_Z \cap T_k) = pa\binom{n-1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-k} + p(1-a)\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k-1}\,,$$

iskana verjetnost pa je enaka

$$\begin{aligned} P(K_Z \mid T_k) &= \frac{P(K_Z \cap T_k)}{P(T_k)} \\ &= \frac{pa\binom{n-1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-k} + p(1-a)\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}} \\ &= p\left(\frac{k}{n}\frac{a}{t} + \frac{n-k}{n}\frac{1-a}{1-t}\right)\,. \end{aligned}$$

Drugi način. *Uporabimo naslednjo pogojno različico izreka o polni verjetnosti:*

$$P(K_Z \mid T_k) = P(K_Z \mid T_Z)\, P(T_Z \mid T_k) + P(K_Z \mid T_Z^c)\, P(T_Z^c \mid T_k)\,. \qquad (*)$$

Ta enakost sicer v splošnem ne velja, zato jo je treba za dani primer posebej utemeljiti. Še prej pa poračunajmo do konca. Najprej iz simetrije dobimo, da je $P(T_Z \mid T_k) = k/n$, *torej* $P(T_Z^c \mid T_k) = (n-k)/n$. *Nato pa po Bayesovi formuli izračunamo*

$$\begin{aligned} P(K_Z \mid T_Z) &= \frac{P(T_Z \mid K_Z)\, P(K_Z)}{P(T_Z)} = \frac{ap}{t}\,, \\ P(K_Z \mid T_Z^c) &= \frac{P(T_Z^c \mid K_Z)\, P(K_Z)}{P(T_Z^c)} = \frac{(1-a)p}{1-t}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$P(K_Z \mid T_k) = \frac{k}{n}\,\frac{ap}{t} + \frac{n-k}{n}\,\frac{(1-a)p}{1-t}\,,$$

kar je isto kot prej.

A utemeljiti moramo še enakost $(*)$. *Izrek o popolni verjetnosti nam da*

$$P(K_Z \cap T_k) = P(K_Z \mid T_Z \cap T_k)\, P(T_Z \cap T_k) + P(K_Z \mid T_Z^c \cap T_k)\, P(T_Z^c \cap T_k)\,.$$

Delimo s $P(T_k)$ *in dobimo*

$$P(K_Z \mid T_k) = P(K_Z \mid T_Z \cap T_k)\, P(T_Z \mid T_k) + P(K_Z \mid T_Z^c \cap T_k)\, P(T_Z^c \mid T_k)\,,$$

kar še ni $(*)$: *utemeljiti je treba še, da je* $P(K_Z \mid T_Z \cap T_k) = P(K_Z \mid T_Z)$ *in* $P(K_Z \mid T_Z^c \cap T_k) = P(K_Z \mid T_Z)$. *Za to pa podobno kot pri prvem načinu opazimo, da je* $T_Z \cap T_k = T_Z \cap T'_{k-1}$ *in* $T_Z^c \cap T_k = T_Z^c \cap T'_k$. *A dogodka* T_Z *in* T'_{k-1} *sta neodvisna, prav tako tudi* T_Z^c *in* T'_k. *Prav tako sta neodvisna dogodka* $K_Z \cap T_Z$ *in* T'_{k-1} *ter dogodka* $K_Z \cap T_Z^c$ *in* T'_k. *Sledi*

$$\begin{aligned} P(K_Z \mid T_Z \cap T_k) &= P(K_Z \mid T_Z \cap T'_{k-1}) = \frac{P(K_Z \cap T_Z \cap T'_{k-1})}{P(T_Z \cap T'_{k-1})} = \frac{P(K_Z \cap T_Z)\, P(T'_{k-1})}{P(T_Z)\, P(T'_{k-1})} \\ &= P(K_Z \mid T_Z) \end{aligned}$$

in podobno

$$\begin{aligned} P(K_Z \mid T_Z^c \cap T_k) &= P(K_Z \mid T_Z^c \cap T'_k) = \frac{P(K_Z \cap T_Z^c \cap T'_k)}{P(T_Z^c \cap T'_k)} = \frac{P(K_Z \cap T_Z^c)\, P(T'_k)}{P(T_Z^c)\, P(T'_k)} \\ &= P(K_Z \mid T_Z^c)\,. \end{aligned}$$

Enakost $(*)$ *je s tem utemeljena, s tem pa tudi legitimnost celotnega izračuna.*

3. (20) Dano je zaporedje metov, kjer v vsakem metu hkrati vržemo eno ali več standardnih kock. V prvem metu vržemo eno kocko. Če v posameznem metu na vseh kockah pade šestica, dodamo še eno kocko, sicer pa pustimo isto število kock. Vsi meti kock so neodvisni.

a. (10) Zapišite porazdelitev števila metov, v katerih smo metali manj kot tri kocke.

Rešitev: Označimo število metov z X_3. Ta slučajna spremenljivka lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4 \ldots$ Slučajna spremenljivka X_3 označuje met, po katerem smo dodali tretjo kocko. Splošneje, naj X_m označuje met, po katerem smo dodali m-to kocko.

Naj bo $n = 2, 3, 4 \ldots$ Če je $X_3 = n$, je X_2 lahko enak $1, 2, \ldots, n-1$. Opišimo dogodek $\{X_2 = k, X_3 = n\}$. To pomeni, da v prvih k metih ni padla šestica, v k-tem metu pa je padla, nakar smo dodali novo kocko. V nadaljnjih $n-k-1$ metih se ni zgodilo, da bi na obeh kockah padla šestica, v $(n-k-1)$-tem metu pa je na obeh kockah padla šestica. Sledi

$$P(X_2 = k, X_3 = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k-1} \cdot \frac{1}{36}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} P(X_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_2 = k, X_3 = n) \\ &= \frac{1}{6^3} \, \frac{\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{\frac{35}{36} - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{30}\left[\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da je število metov, pri katerih smo metali dve kocki, strogo večje od števila metov, v katerih smo metali eno kocko?

Namig: pogojujte na število metov, v katerih smo metali eno kocko.

Rešitev: Označimo z A dogodek, da je število metov, pri katerih smo metali dve kocki, strogo večje od števila metov, v katerih smo metali eno kocko. Število metov, v katerih smo metali eno kocko, je natanko X_2. Pogojno na $X_2 = k$ se dogodek A ujema z dogodkom, da se nikoli v prvih k metih, ko smo metali dve kocki, ni zgodilo, da bi na obeh padla šestica. Torej je

$$P(A \mid X_2 = k) = \left(\frac{35}{36}\right)^{k}.$$

Sledi

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \mid X_2 = k)\, P(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{35}{36}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{41}\,.$$

4. (20) Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Definirajmo še slučajno spremenljivko $Y = \dfrac{X}{1-X}$.

a. (15) Izračunajte kumulativni porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: Za $x \geq 0$ velja

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \frac{x}{1+x}\,,$$

torej je v splošnem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & ; x \geq 0\,. \end{cases}$$

Nadalje je treba izračunati

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \neq 1,\ \frac{X}{1-X} \leq y\right),$$

za to pa je treba predvsem rešiti ustrezno neenačbo.

Če je $X < 1$, je zgornja neenačba ekvivalentna neenačbi $X \leq (1-X)y$ oziroma $X(y+1) \leq y$. Če je $y > -1$, je to ekvivalentno neenačbi $X \leq \frac{y}{y+1}$, če je $y < -1$, pa neenačbi $X \geq \frac{y}{y+1}$. Za $y = -1$ neenačba ne drži. Za $y > -1$ je torej

$$P(X < 1, Y \leq y) = P\left(X < 1,\ X \leq \frac{y}{y+1}\right).$$

Toda za $y > -1$ je $\frac{y}{y+1} < 1$, zato je

$$P(X < 1, Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{y+1}\right).$$

Za $y \geq 0$ je torej

$$P(X < 1, Y \leq y) = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{y}{y+1} + 1} = \frac{y}{2y+1}\,,$$

za $-1 < y < 0$ pa je $P(X < 1, Y \leq y) = 0$; to potem velja tudi za $y \leq -1$.

Če je $X > 1$, je obravnavana neenačba ekvivalentna neenačbi $X \geq (1-X)y$ oziroma $X(y+1) \geq y$. Če je $y > -1$, je to ekvivalentno neenačbi $X \geq \frac{y}{y+1}$, če je $y < -1$, pa neenačbi $X \leq \frac{y}{y+1}$. Za $y = -1$ neenačba drži. Za $y > -1$ je torej

$$P(X > 1, Y \leq y) = P\left(X > 1,\ X \geq \frac{y}{y+1}\right).$$

Toda za $y > -1$ *je* $\frac{y}{y+1} < 1$*, zato je*

$$P(X > 1, Y \leq y) = P(X > 1) = \frac{1}{2}\,.$$

Rezultat velja tudi za $y = 1$*. Za* $y < -1$ *je*

$$P(X > 1, Y \leq y) = P\left(X > 1,\ X \leq \frac{y}{y+1}\right)\,.$$

Ker je $\frac{y}{y+1} > 1$*, je nadalje*

$$P(X > 1, Y \leq y) = P\left(1 < X \leq \frac{y}{y+1}\right) = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{y}{y+1} + 1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4y+2}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$F_Y(y) = P(X < 1, Y \leq y) + P(X > 1, Y \leq y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4y+2} & ;\ y \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & ;\ -1 \leq y \leq 0 \\ \dfrac{4y+1}{4y+2} & ;\ y \geq 0\,. \end{cases}$$

b. (5) Dokažite, da je Y porazdeljena zvezno, in izračunajte njeno gostoto.

Rešitev: Slučajna spremenljivke Y *je porazdeljena zvezno, ker je funkcija* F_Y *zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. Po odvajanju dobimo gostoto:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2y+1)^2} & ;\ y < -1 \ \text{ali}\ y > 0 \\ 0 & ;\ -1 \leq y \leq 0\,. \end{cases}$$

5. (20) Pri testiranju generatorjev slučajnih števil pride do naslednjega vprašanja: imamo m kartic, oštevilčenih z $1, 2, \ldots, m$. Kartice izbiramo naključno z vračanjem, tako da so izbire med sabo neodvisne, pri vsakem izbiranju pa so vse kartice enako verjetne. Izbiranje ponavljamo, dokler ni število na izbrani kartici manjše ali enako tistemu na predhodno izbrani kartici. Naj bo X dolžina niza kartic s strogo naraščajočimi števili, Y pa število na zadnji izbrani kartici.

a. (15) Navedite vse možne pare, ki so lahko vrednosti para (X, Y), in izračunajte $P(X = k, Y = l)$.

Namig: strogo naraščajoči nizi k števil iz množice $\{1, 2, \ldots, a\}$ so v bijektivni korespondenci s kombinacijami velikosti k iz iste množice.

Rešitev: Možni pari so (k, l) z $1 \le l, k \le m$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če je v nizu k strogo naraščajočih števil zadnje večje ali enako l, naslednje pa je l. Prešteti moramo, koliko je strogo naraščajočih nizov k števil, v katerih je zadnje l ali več. Strogo naraščajoči nizi dolžine k so v bijektivni korespondenci s kombinacijami elementov. Vseh strogo naraščajočih nizov dolžine k iz množice $\{1, 2, \ldots, m\}$ je $\binom{m}{k}$, odšteti pa moramo tiste, ki vsebujejo samo elemente iz $\{1, 2, \ldots, l-1\}$, torej $\binom{l-1}{k}$. Binomski simbol $\binom{a}{b}$ za $b > a$ interpretiramo kot 0. Verjetnost, da dobimo katerega koli od konkretnih nizov $k+1$ števil, ki ustrezajo dogodku $\{X = k, Y = l\}$, je zaradi privzetka neodvisnosti enaka $\frac{1}{m^{k+1}}$. Sledi

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{l-1}{k} \right] .$$

b. (5) Najdite verjetnost $P(Y = m)$.

Rešitev:

Prvi način. *Iz formule za robne porazdelitve sledi*

$$P(Y = m) = \sum_{k=1}^{m} P(X = k, Y = m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k} \right] .$$

Opazimo, da lahko seštevamo že od $k = 0$ naprej, saj je ustrezni člen enak nič. Nato seštejemo po binomski formuli in dobimo

$$P(Y = m) = \frac{1}{m} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \right] = \frac{(m+1)^{m-1}}{m^{m+1}} .$$

Drugi način. *Začnemo tako kot pri prvem načinu, nakar uporabimo Pascalovo* *identiteto in prav tako seštejemo po binomski formuli:*

$$\begin{aligned} P(Y=m) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \binom{m-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1} \\ &= \frac{(m+1)^{m-1}}{m^{m+1}}\,. \end{aligned}$$

Tretji način. *Označimo z A dogodek, da se najdaljše začetno strogo naraščajoče zaporedje oznak izbranih kartic konča z m. Tako zaporedje je lahko dolgo največ m, torej je dovolj prešteti vsa zaporedja števil od 1 do m dolžine m, ki imajo to lastnost, da se najdaljše začetno strogo naraščajoče zaporedje oznak izbranih kartic konča z m. Izkaže se, da so taka zaporedja v bijektivni korespondenci s funkcijami iz $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ v $\{0, 1, \ldots, m\}$. Vsaki taki funkciji f namreč zaporedje z zahtevano lastnostjo priredimo na naslednji način: če je $f^{-1}(\{0\}) = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ in $f^{-1}(\{1, 2, \ldots, m\}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-k}\}$, kjer je $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \le m-1$ in $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{m-k} \le m-1$, izberemo zaporedje*

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, f(j_1), f(j_2), \ldots, f(j_{m-k})\,.$$

Ni težko preveriti, da je ta predpis res bijekcija med ustreznima množicama. Tako dobimo, da je zaporedij z iskano lastnostjo natanko $(m+1)^{m-1}$. Sledi $P(A) = (m+1)^{m-1}/m^m$. Dogodek $\{Y = m\}$ pa pomeni, da se zgodi A in da najdaljšemu začetnemu strogo naraščajočemu zaporedju oznak izbranih kartic, ki se konča z m, sledi še ena kartica z oznako m. Sledi $P(Y = m) = (m+1)^{m-1}/m^{m+1}$, kar je isto kot prej.

6. (20) V skupini je n moških in n žensk. Teh $2n$ oseb lahko naključno razmestimo po parih na $\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$ načinov. Privzemite, da so vse razmestitve enako verjetne. Naj bo X število parov, v katerih sta osebi različnega spola.

a. (10) Izračunajte $p_n = P(X = 0)$. Binomskih simbolov in vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev:

Prvi način. *Dogodek* $\{X = 0\}$ *pomeni, da so vse ženske v paru z ženskami in vsi moški z moškimi. To je možno je, če je* n *sod: za lih* n *je torej* $P(X = 0) = 0$, *za sod* n *pa je*

$$P(X=0) = \frac{\left(\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot 2^{n/2}}\right)^2}{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{(n!)^3}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2(2n)!}\,.$$

Drugi način. *Oštevilčimo, recimo, vse ženske z* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Naj bo*

$$A_i = \{\textit{ženska } i \textit{ je v paru z moškim}\}\,.$$

Velja $P(X > 0) = \cup_{i=1}^n A_i$. *Zaradi simetrije je oseba v paru z žensko* i *naključno izbrana izmed ostalih* $2n-1$ *oseb. Sledi*

$$P(A_i) = \frac{n}{2n-1}\,.$$

Po istem kopitu je

$$P(A_{i+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) = \frac{n-i}{2(n-i)-1}\,.$$

Dobimo

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(n-j)}{2(n-j)-1}\,.$$

Zaradi simetrije je verjetnost preseka katerih koli i *dogodkov enaka. Po formuli za vključitve in izključitve dobimo*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\binom{n}{i}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(n-j)}{2(n-j)-1}\,,$$

torej

$$P(X=0) = \sum_{i=0}^n (-1)^i\binom{n}{i}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(n-j)}{2(n-j)-1}\,.$$

Opomba: če je n *lih, je dogodek* $\{X = 0\}$ *nemogoč, zgornja formula pa še vedno velja.*

b. (10) Izrazite porazdelitev slučajne spremenljivke X z verjetnostmi p_k za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rešitev: Možne vrednosti slučajne spremenljivke X so načeloma $k = 0, 1, \ldots, n$, vendar so verjetnosti različne od 0 le za tiste k, za katere je $n-k$ sodo število. Dogodek $\{X = k\}$ se zgodi, če je natanko k moških in k žensk v parih, v ostalih parih pa sta osebi istega spola. Prešteti moramo, koliko razmestitev ustreza temu opisu. Izberemo k moških in k žensk, kar lahko naredimo na $\binom{n}{k}^2$ načinov. Izbrane osebe lahko razmestimo v mešane pare na $k!$ načinov. Ostale osebe moramo razmestiti v pare tako, da med njimi ne bo mešanih parov. To lahko naredimo na

$$\frac{1}{2^{n-k}}\left(\frac{(n-k)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\right)^2 = p_{n-k}\cdot\frac{\big(2(n-k)\big)!}{(n-k)!\cdot 2^{n-k}}$$

načinov. Sledi

$$P(X=k) = \binom{n}{k}^2 \cdot k! \cdot \frac{\dfrac{1}{2^{n-k}}\left(\dfrac{(n-k)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\right)^2}{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{2^k\cdot (n!)^3}{k!\cdot(2n)!\cdot\left[\left(\frac{n-k}{2}\right)!\right]^2}$$

ali tudi

$$P(X=k) = \binom{n}{k}^2 \cdot k! \cdot \frac{p_{n-k}\cdot\dfrac{\big(2(n-k)\big)!}{(n-k)!\cdot 2^{n-k}}}{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}} = \frac{2^k\cdot(n!)^3\cdot(2n-2k)!}{(2n)!\cdot k!\cdot\big[(n-k)!\big]^3}\,p_{n-k}\,.$$