Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Matematika

Verjetnost

1. kolokvij

25. 11. 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Pošteno kocko mečemo n-krat, pri čemer predpostavljamo $n \geq 10$. Predpostavljamo, da so meti neodvisni. Za $i = 1, 2, \ldots, 6$ naj bo A_i dogodek, da se izid i pojavi natanko dvakrat v nizu n metov.

a. (5) Izračunajte verjetnosti $P(A_i)$.

Rešitev: mete, kjer se pojavi izid i, lahko izberemo na $\binom{n}{2}$ *načinov. Na izbranih metih se mora pojaviti izid i, na ostalih pa izid, različen od i. Zaradi neodvisnosti je verjetnost vsakega načina, na katerega se lahko zgodi dogodek* A_i*, enaka* $(1/6)^2(5/6)^{n-2}$. *Sledi*

$$P(A_i) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \, \frac{5^{n-2}}{6^n} \,.$$

Alternativno lahko opazimo, da ima število pojavitev izida i binomsko porazdelitev s parametroma n in $1/6$*, in odgovor je na dlani.*

b. (5) Izračunajte verjetnost $P(A_2 \mid A_1)$.

Rešitev: dogodek $A_1 \cap A_2$ *se lahko zgodi na toliko načinov, kolikor je načinov izbire dveh disjunktnih podmnožic velikosti* 2 *izmed vseh metov, torej*

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

Vsak tak način ima zaradi neodvisnosti verjetnost $(1/6)^4(4/6)^{n-4}$. *Sledi*

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid A_1) &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \\ &= \binom{n-2}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} \, \frac{4^{n-4}}{5^{n-2}} \,. \end{aligned}$$

Alternativno lahko argumentiramo, da pri pogoju A_1 *postavljamo vprašanje za* $n-2$ *metov kocke s petimi izidi in je število pojavitev izida* 2 *porazdeljeno binomsko s parametroma* $n-2$ *in* $1/5$.

c. (10) Izračunajte verjetnost $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$.

Rešitev:

Prvi način. *Formulo iz točke b. posplošimo v*

$$\begin{aligned} P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) &= \binom{n-2k}{2} \left(\frac{1}{6-k}\right)^2 \left(\frac{5-k}{6-k}\right)^{n-2k-2} \\ &= \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2} \, \frac{(5-k)^{n-2k-2}}{(6-k)^{n-2k}} \,. \end{aligned}$$

Zmnožimo in dobimo

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&\qquad = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2^5 \cdot 6^n} \\
&\qquad = \frac{n!}{32\,(n-10)! \cdot 6^n}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. *Med n meti moramo izbrati pet disjunktnih množic po dva meta. To lahko naredimo na*

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2} = \frac{n!}{(n-10)! \cdot 2^5}$$

načinov. Na izbranih metih moramo dobiti točno določene izide, na ostalih pa izid 6. Sledi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{n!}{(n-10)! \cdot 2^5 \cdot 6^n}\,,$$

kar je isto kot prej.

2. (20) Pošteno kocko mečemo, dokler ne dobimo vseh šestih možnih izidov. Privzamemo, da so meti neodvisni. Naj bo X potrebno število metov.

a. (5) Naj bo $A_{n,i}$ dogodek, da po n metih še nismo videli izida i. Za $i = 1, 2, 3, 4, 5$ izračunajte $P(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \cdots \cap A_{n,i})$.

Rešitev: zgornji presek je dogodek, da smo v n metih vedno dobivali izide $i+1, i+2, \ldots, 6$. Zaradi neodvisnosti je

$$P(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \cdots \cap A_{n,i}) = \left(\frac{6-i}{6}\right)^n .$$

b. (15) Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X. Verjetnosti zapišite kot zaključene izraze.

Rešitev: možne vrednosti slučajne spremenljivke X so $n = 6, 7, \ldots$ Pripadajoče verjetnosti lahko izračunamo na vsaj dva načina.

Prvi način. *Izrazimo*

$$\{X = n\} = \bigcup_{i=1}^{6} \big(B_{n-1,i} \cap C_{n,i}\big) ,$$

kjer je

$$\begin{aligned} B_{n,i} &:= \{\textit{v prvih } n \textit{ metih so se že pojavili vsi izidi razen izida } i\} , \\ C_{n,i} &:= \{\textit{v } n\textit{-tem metu je prišlo do izida } i\} . \end{aligned}$$

Velja

$$B_{n,6} = A_{n,1}^c \cap A_{n,2}^c \cap A_{n,3}^c \cap A_{n,4}^c \cap A_{n,5}^c \cap A_{n,6} .$$

Verjetnost tega dogodka izračunamo kot

$$\begin{aligned} P(B_{n,6}) &= P(A_{n,6}) - P\big((A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup A_{n,3} \cup A_{n,4} \cup A_{n,5}) \cap A_{n,6}\big) \\ &= P(A_{n,6}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{5} (A_{n,i} \cap A_{n,6})\right) . \end{aligned}$$

Drugi člen lahko izračunamo po formuli za vključitve in izključitve, pri čemer uporabimo točko a. in upoštevamo simetrijo. Dobimo

$$P(B_{n,6}) = 1 - \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1} \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^n = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^n .$$

Zadnji člen v vsoti je enak nič, torej je tudi

$$P(B_{n,6}) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^n .$$

Spet zaradi simetrije je toliko enaka verjetnost $P(B_{n,i})$ za vse $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zaradi neodvisnosti je

$$P(B_{n-1,i} \cap C_{n,i}) = P(B_{n-1,i})\, P(C_{n,i}) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{n-1}}{6^n} \,.$$

Ker so dogodki $B_{n-1,1}, \ldots, B_{n-1,6}$ paroma disjunktni, je končno

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{n-1}}{6^{n-1}} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Drugi način. *Izrazimo*

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) \,.$$

Velja

$$\{X > n\} = \bigcup_{i=1}^{6} A_{n,i} \,.$$

Po formuli za vključitve in izključitve iz točke a. ob upoštevanju simetrije dobimo

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} P(A_{n,1} \cap \cdots \cap A_{n,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \left(\frac{6-i}{6}\right)^n \\ &= 6\left(\frac{5}{6}\right)^n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^n + 20\left(\frac{1}{2}\right)^n - 15\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{6}\right)^n \,. \end{aligned}$$

To velja tudi za $n = 5$ – izraz na desni pride 1. To lahko po množenju s 6^5 preverimo neposredno:

$$6 \cdot 5^5 - 15 \cdot 4^5 + 20 \cdot 3^5 - 15 \cdot 2^5 + 6 = 18750 - 15360 + 4860 - 480 + 6 = 7776 = 6^5 \,.$$

Torej za vse $n = 6, 7, 8, \ldots$ velja

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \left[\left(\frac{6-i}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{6-i}{6}\right)^n \right] \\ &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \frac{i}{6} \left(\frac{6-i}{6}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{5}{i-1} \left(\frac{6-i}{6}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^{n-1} \,, \end{aligned}$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Opomba. *Neposredno lahko dobimo*

$$P(X=6)=\frac{6!}{6^6}=\frac{5!}{6^5}$$

in neposredno lahko preverimo, da se to ujema s splošno formulo: po množenju s 6^5 *dobimo*

$$5^5-5\cdot 4^5+10\cdot 3^5-10\cdot 2^5+5\cdot 1^5=3125-5120+2430-320+5=120=5!\,.$$

3. (20) V posodi sta dve črni in $n \geq 1$ belih kroglic. Na vsakem koraku iz posode na slepo izvlečemo kroglico, nakar v posodo vrnemo belo kroglico, ne glede na barvo izvlečene kroglice. Tako je med poljubnima dvema korakoma v posodi $n + 2$ kroglic. Naj bo X število vlečenj, po katerem so v posodi prvič same bele kroglice.

a. (15) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, \ldots$ *Za* k *iz te množice je dogodek* $\{X = k\}$ *dogodek, da na* k*-tem koraku drugič izvlečemo črno kroglico. To je disjunktna unija dogodkov* $B_{1,k}, B_{2,k}, \ldots, B_{k-1,k}$*, kjer je*

$$B_{j,k} = \{\textit{črno kroglico izvlečemo na } j\textit{-tem in } k\textit{-tem koraku}\} .$$

Velja

$$P(B_{j,k}) = \frac{2n^{j-1}(n+1)^{k-j-1}}{(n+2)^k} ,$$

torej je

$$P(X = k) = 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{n^{j-1}(n+1)^{k-j-1}}{(n+2)^k} = \frac{2\big[(n+1)^{k-1} - n^{k-1}\big]}{(n+2)^k} .$$

b. (5) Naj bo B_1 dogodek, da pri prvi izbiri izvlečemo črno kroglico. Za vsak $k = 2, 3, 4, \ldots$ izračunajte $P(B_1 \mid X = k)$.

Rešitev:

$$P(B_1 \mid X = k) = \frac{P(B_{1,k})}{P(X = k)} = \frac{(n+1)^{k-2}}{(n+1)^{k-1} - n^{k-1}} .$$

4. (20) V posodi naj bo r belih in r črnih kroglic. Kroglice izbiramo zaporedoma, naključno in brez vračanja.

a. (10) Naj bo M število izbiranj, dokler ne dobimo prve bele kroglice, vključno s prvo belo. Za $k = 1, 2, \ldots, r + 1$ izračunajte $P(M = k)$.

Rešitev:

Prvi način: *dogodek $\{M = k\}$ pomeni, da v prvih $k - 1$ izbiranjih izvlečemo same črne kroglice, nakar izvlečemo belo. Lahko pa si predstavljamo tudi, da $k-1$ kroglic, ki jih bomo najprej izvlekli, razporejamo med označene bele in črne kroglice. Tako dobimo*

$$P(M = k) = \frac{r}{2r} \cdot \frac{r-1}{2r-1} \cdots \frac{r-k+2}{2r-k+2} \cdot \frac{r}{2r-k+1} = \frac{\binom{r}{k-1}}{\binom{2r}{k-1}} \cdot \frac{r}{2r-k+1} \,.$$

Ob standardnem dogovoru, da je $\binom{n}{r} = 0$, brž ko je r izven množice $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, ta formula velja za vse celoštevilske k razen za $k = 2r + 1$, ko nima pomena.

Drugi način: *predstavljamo si, da bele kroglice razporejamo na $2r$ označenih položajev za vlečenje. Dogodek $\{M = k\}$ pomeni, da je ena od teh kroglic na k-tem položaju, preostalih $r - 1$ pa je na $2r - k$ položajih, od koder kroglice niso izvlečene. Tako dobimo*

$$P(M = k) = \frac{\binom{2r-k}{r-1}}{\binom{2r}{r}} \,.$$

Ob standardnem dogovoru za bimonske simbole, omenjenem pri prvem načinu, ta formula velja za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$

Iskane verjetnosti lahko izrazimo tudi kot

$$P(M = k) = r\,\frac{r!\,(2r-k)!}{(2r)!\,(r-k+1)!} \,.$$

b. (10) Naj bo N število izbiranj, dokler ne dobimo ali r belih ali r črnih kroglic, vključno z zadnjo izbrano kroglico. Izračunajte $P(N = k)$.

Rešitev: Zadnja izbrana kroglica je lahko bela ali črna. Naj bo B dogodek, da je bela. Zaradi simetrije je $P(N = k) = 2P\big(\{N = k\} \cap B\big)$. Tudi tu lahko nadaljujemo na več načinov, vselej pa upoštevamo, da lahko slučajna spremenljivka N zavzame vrednosti $r, r + 1, \ldots, 2r - 1$.

Prvi način: *dogodek $\{N = k\} \cap B$ pomeni, da je med prvimi $k - 1$ izvlečenimi kroglicami natanko $r - 1$ belih, bela pa je tudi k-ta izvlečena kroglica. Verjetnost, da je prvih $r - 1$ izvlečenih kroglic belih, nadaljnje črne, k-ta pa je spet bela, je enaka*

$$\frac{r}{2r} \cdot \frac{r-1}{2r-1} \cdots \frac{2}{r+2} \cdot \frac{r}{r+1} \cdot \frac{r-1}{r} \cdots \frac{2r-k+1}{2r-k+2} \cdot \frac{1}{2r-k+1}$$
$$= \frac{r!}{(2r) \cdot (2r-1) \cdots (r+1)} = \frac{1}{\binom{2r}{r}} \,.$$

To pa je tudi verjetnost za vsako izmed $\binom{k-1}{r-1}$ možnih razporeditev belih kroglic med prvimi $k-1$ izvlečenimi, ki tvorijo dogodek $\{N=k\}\cap B$. Sledi

$$P(N=k) = 2\cdot\frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{2r}{r}}$$

Formula velja za vse celoštevilske $k<2r$, dobimo pa jo lahko tudi neposredno, tako da preprosto gledamo razporeditve belih kroglic, ki jih ne ločimo, na $2r$ označenih položajev za vlečenje. Dogodek $\{N=k\}\cap B$ pomeni, da je ena od teh kroglic na k-tem položaju, preostalih $r-1$ pa je na položajih, ki predstavljajo $k-1$ prvih izvlečenih kroglic.

Drugi način: *dogodek $\{N=k\}\cap B$ pomeni, da je med prvimi $k-1$ izvlečenimi kroglicami natanko $r-1$ belih, torej $k-r$ črnih, bela pa je tudi k-ta izvlečena kroglica. Če si predstavljamo, da $k-1$ kroglic, ki jih bomo najprej izvlekli, razporejamo med označene bele in črne kroglice, dobimo*

$$P(N=k) = 2\cdot\frac{\binom{r}{r-1}\binom{r}{k-r}}{\binom{2r}{k-1}}\cdot\frac{1}{2r-k+1} = 2\cdot\frac{r\binom{r}{k-r}}{\binom{2r}{k-1}}\cdot\frac{1}{2r-k+1}\,.$$

Formula spet velja za vse celoštevilske $k<2r$.

Tretji način: *dogodek $\{N=k\}\cap B$ pomeni, da so med $2r-k$ neizvlečenimi kroglicami same črne, zadnja izvlečena pa je bela. Tako dobimo*

$$P(N=k) = \frac{r}{2r}\cdot\frac{r-1}{2r-1}\cdots\frac{k-r+1}{k+1}\cdot\frac{r}{k}\cdot 2 = 2\cdot\frac{\binom{r}{2r-k}}{\binom{2r}{2r-k}}\cdot\frac{r}{k} = 2\cdot\frac{\binom{r}{k-r}}{\binom{2r}{k}}\cdot\frac{r}{k}\,.$$

Formula spet velja za vse celoštevilske $k<2r$. Izpeljemo jo lahko tudi tako, da opazimo, da za $k<2r$ velja $P(N=k)=2P(M=2r-k+1)$.

Iskane verjetnosti lahko izrazimo tudi kot

$$P(N=k) = 2r\,\frac{r!\,(k-1)!}{(2r)!\,(k-r)!}\,.$$

5. (20) Mečemo standardno kocko, meti so neodvisni.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da je prva številka, ki pade in ni enojka, dvojka?

Rešitev: označimo iskani dogodek z A_2. Nadaljujemo lahko na več načinov.

Prvi način: *dogodek A_2 sestavljajo zaporedja $2, 12, 112\ldots$ in njegova verjetnost je enaka*

$$P(A_2) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5}\,.$$

Drugi način: *če s K_1 označimo dogodek, da v prvem metu pade enojka, velja:*

$$P(K_1) = \frac{1}{6}\,, \qquad P(A_2 \mid K_1) = P(A_2)\,,$$
$$P(K_1^c) = \frac{5}{6}\,, \qquad P(A_2 \mid K_1^c) = \frac{1}{5}\,.$$

Po formuli za popolno verjetnost dobimo

$$P(A_2) = \frac{1}{6}\,P(A_2) + \frac{1}{6}\,.$$

Razrešimo in dobimo $P(A_2) = 1/5$.

Tretji način: *za $n = 0, 1, 2, \ldots$ definirajmo H_n kot dogodek, da sprva pade n enojk, nakar pade številka, ki ni enojka. Tedaj je $P(A_2 \mid H_n) = 1/5$. Ker so dogodki $H_0, H_1, \ldots$ paroma disjunktni, njihova unija pa je skoraj gotov dogodek, tj. ima verjetnost 1 (zunaj unije je le dogodek, da enojke padajo v nedogled), je tudi $P(A_2) = 1/5$.*

Četrti način: *za $k = 2, 3, 4, 5, 6$ naj bo A_k dogodek, da je prva številka, ki pade in ni enojka, številka k. Zaradi simetrije so dogodki $A_2, A_3, \ldots, A_6$ enako verjetni. So pa tudi paroma disjunktni in njihova unija je skoraj gotov dogodek (zunaj unije je spet le dogodek, da enojke padajo v nedogled). Sledi $P(A_2) = 1/5$.*

b. (15) Naj bo X število trojk, ki padejo, preden dobimo zaporedje $1, 2$. Izračunajte porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Namig: pogojujte na primerna začetna zaporedja metov.

Rešitev:

Prvi način: *pogojujmo na naslednje dogodke:*

$$\begin{aligned}
K_{12}' &:= \{\textit{najprej pade enojka in za prvo številko, ki ni enojka, pade dvojka}\}\,,\\
K_2 &:= \{\textit{najprej pade dvojka}\}\,,\\
K_3' &:= \{\textit{prva številka, ki pade in ni enojka, je trojka}\}\,,\\
K_4' &:= \{\textit{prva številka, ki pade in ni enojka, je 4, 5 ali 6}\}\,.
\end{aligned}$$

Ti dogodki so paroma disjunktni, njihova unija pa ima verjetnost 1. Iz točke a. in simetrije dobimo

$$P(K_{12}') = \frac{1}{30}\,, \qquad P(K_2) = \frac{1}{6}\,, \qquad P(K_3') = \frac{1}{5}\,, \qquad P(K_4') = \frac{3}{5}\,.$$

Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti $0, 1, 2, \ldots$ in za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$\begin{aligned} P(X = k \mid K_{12}') &= 0\,, \\ P(X = k \mid K_2 \cup K_4') &= P(X = k)\,, \\ P(X = k \mid K_3') &= P(X = k - 1)\,. \end{aligned}$$

Formula za popolno verjetnost nam da

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right) P(X = k) + \frac{1}{5}\, P(X = k - 1)\,.$$

Po ureditvi dobimo $P(X = k) = \frac{6}{7} P(X = k - 1)$, torej

$$P(X = k) = \left(\frac{6}{7}\right)^k P(X = 0)\,.$$

Ker mora biti vsota verjetnosti enaka 1, mora biti

$$P(X = 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k} = \frac{1}{7}\,,$$

torej je

$$P(X = k) = \frac{6^k}{7^{k+1}}\,.$$

Z drugimi besedami, slučajna spremenljivka $X + 1$ je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/7)$.

Drugi način: *pogojujmo na naslednje dogodke:*

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{\textit{najprej pade enojka}\}\,, \\ K_2 &:= \{\textit{najprej pade dvojka, štirica, petica ali šestica}\}\,, \\ K_3 &:= \{\textit{najprej pade trojka}\}\,. \end{aligned}$$

Ti dogodki tvorijo particijo verjetnostnega prostora. Očitno je $P(K_1) = P(K_3) = 1/6$ in $P(K_2) = 2/3$. Nadalje za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$P(X = k \mid K_2) = P(X = k) \quad \textit{in} \quad P(X = k \mid K_3) = P(X = k - 1)\,,$$

pogojne verjetnosti $P(X = k \mid K_1)$ pa zahtevajo malo podrobnejšo obravnavo. Zaenkrat iz formule za popolno verjetnost dobimo

$$P(X = k) = \frac{1}{6}\, P(X = k \mid K_1) + \frac{2}{3}\, P(X = k) + \frac{1}{6}\, P(X = k - 1)$$

oziroma po ureditvi

$$P(X = k) = \frac{1}{2}\, P(X = k \mid K_1) + \frac{1}{2}\, P(X = k - 1)\,. \qquad (*)$$

Za izražavo pogojnih verjetnosti $P(X = k \mid K_1)$ definirajmo nove dogodke:

$$
\begin{aligned}
K_{11} &:= \{\textit{v prvih dveh metih pade enojka}\}\,,\\
K_{12} &:= \{\textit{najprej pade enojka, nato pa dvojka}\}\,,\\
K_{13} &:= \{\textit{najprej pade enojka, nato pa trojka}\}\,,\\
K_{14} &:= \{\textit{najprej pade enojka, nato pa 4, 5 ali 6}\}\,.
\end{aligned}
$$

To dogodki tvorijo particijo dogodka K_1 in za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$
\begin{aligned}
P(K_{11} \mid K_1) &= \frac{1}{6}\,, & P(X = k \mid K_{11}) &= P(X = k \mid K_1)\,,\\
P(K_{12} \mid K_1) &= \frac{1}{6}\,, & P(X = k \mid K_{12}) &= 0\,,\\
P(K_{13} \mid K_1) &= \frac{1}{6}\,, & P(X = k \mid K_{13}) &= P(X = k - 1)\,,\\
P(K_{14} \mid K_1) &= \frac{1}{2}\,, & P(X = k \mid K_{14}) &= P(X = k)\,.
\end{aligned}
$$

Pogojna različica formule za popolno verjetnost nam da

$$
P(X = k \mid K_1) = \frac{1}{6}\,P(X = k \mid K_1) + \frac{1}{2}\,P(X = k) + \frac{1}{6}\,P(X = k - 1)
$$

oziroma po ureditvi

$$
P(X = k \mid K_1) = \frac{3}{5}\,P(X = k) + \frac{1}{5}\,P(X = k - 1)\,.
$$

Vstavimo v zvezo $(*)$ in dobimo

$$
P(X = k) = \frac{3}{10}\,P(X = k) + \frac{3}{5}\,P(X = k - 1)
$$

oziroma po ureditvi $P(X = k) = \frac{6}{7}P(X = k - 1)$. Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

6. (20) Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogodki in $m \le n$. Označite z B_m dogodek, da se zgodi natanko m od dogodkov $A_1, \ldots, A_n$, z drugimi besedami

$$B_m = \bigcup (M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n) \ ,$$

kjer je $M_i \in \{A_i, A_i^c\}$, unija pa teče po vseh naborih $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, v katerih je $M_i = A_i$ za natanko m indeksov i, za ostale pa je $M_i = A_i^c$.

a. (10) Izpeljite formulo

$$P(B_m) = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} S_i \,,$$

kjer je

$$S_i = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}) \ .$$

Namig: dogodki v uniji za B_m so disjunktni.

Rešitev: z upoštevanjem formule za vključitve in izključitve dobimo

$$\begin{aligned}
&P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big) \\
&\quad = P\Big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap \big(\cup_{j=m+1}^n A_j\big)^c\Big) \\
&\quad = P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) - P\big(\cup_{j=m+1}^n (A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_j)\big) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \sum_{m+1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n} P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}) \\
&\quad = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \sum_{m+1 \le j_1 < \cdots < j_{i-m} \le n} P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_{i-m}}) \\
&\quad = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \sum_{m+1 \le j_{m+1} < \cdots < j_i \le n} P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{j_{m+1}} \cap \cdots \cap A_{j_i}) \\
&\quad = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n \\ j_1 = 1, \ldots, j_m = m}} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}) \,.
\end{aligned}$$

Splošneje, če je $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n$ in so $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dogodki, pri katerih je $M_i = A_i$ za $i = i_1, i_2, \ldots, i_m$, za vse ostale i pa je $M_i = A_i^c$, velja

$$P(M_1 \cap \cdots \cap M_n) = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n \\ \{j_1, \ldots, j_i\} \supseteq \{i_1, \ldots, i_m\}}} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}) \,.$$

Ko seštejemo vse verjetnosti v uniji za B_m, bomo verjetnost preseka $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}$ šteli natanko tolikokrat, kolikor je m-elementnih podmnožic množice $\{j_1, \ldots, j_i\}$. Formula sledi.

b. (10) Med števili $000000, 000001, 000002, \ldots, 999999$ naključno izberemo eno, vsa z enako verjetnostjo. Za $i = 0, 1, \ldots, 9$ naj bo A_i dogodek, da se števka i pojavi natanko dvakrat. Za $m = 1, 2, 3$ izračunajte verjetnost, da se zgodi natanko m teh dogodkov.

Rešitev: uporabimo formulo iz prvega dela naloge. Zaradi simetrije imajo vsi preseki enako mnogo dogodkov A_i enako verjetnost, zato je

$$S_i = \binom{10}{i} P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_i\right) ,$$

poleg tega pa je $S_4 = \cdots = S_{10} = 0$. Ker se števke pojavljajo neodvisno, je

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}98415\,, \\ P(A_1 \cap A_2) &= \binom{6}{2}\binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0{,}00729\,, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^6 = 0{,}00009\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$S_1 = 0{,}98415\,, \qquad S_2 = 0{,}32805\,, \qquad S_3 = 0{,}0108\,.$$

in nadalje

$$\begin{aligned} P(B_1) &= S_1 - 2S_2 + 3S_3 = 0{,}36045\,, \\ P(B_2) &= S_2 - 3S_3 = 0{,}29565\,, \\ P(B_3) &= S_3 = 0{,}0108\,. \end{aligned}$$

Ime in priimek: ________________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

1. kolokvij

25. 11. 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

5. (20) Matematika Adam in Branka neodvisno drug od drugega izbereta vsak svojo podmnožico množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Adam za vsako število vrže pošten kovanec in ga uvrsti v svojo množico, če pade grb, sicer pa ne. Branka pa izbere eno izmed podmnožic moči b, vsako z enako verjetnostjo. Pri tem je $b \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vnaprej predpisano število. Privzamemo, da so vsi meti Adamovega kovanca neodvisni tako med seboj kot tudi od Brankine množice. Označimo z A Adamovo, z B pa Brankino množico.

a. (10) Zapišite porazdelitev moči simetrične razlike $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pripadajoče verjetnosti zapišite s sklenjeno formulo, pri čemer so dovoljene osnovne računske operacije in binomski simboli.

   Rešitev: Fiksirajmo množico B. Element, ki je v B, bo v simetrični razliki, če Adam pri njem vrže cifro, element, ki ni v B, pa bo v simetrični razliki, če Adam pri njem vrže grb. V vsakem primeru pa bo posamezno število v množici A z verjetnostjo $1/2$ in števila so pri tem še vedno neodvisna. Tako dobimo, da je porazdelitev binomska $\mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Če torej z X označimo moč dane simetrične razlike, velja

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}\,;\ k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

b. (10) Modificirajmo nalogo tako, da Adam pri številu n ne vrže kovanca in ga ne vključi v množico. Kakšna je zdaj porazdelitev dane simetrične razlike?

   Rešitev: Z verjetnostjo $1 - b/n$ število n ne bo v množici B. Tedaj tudi ne bo v dani simetrični razliki. Za prestala števila bo še vedno veljalo, da bodo v simetrični razliki z verjetnostjo $1/2$, neodvisno drugo od drugega. Če moč nove simetrične razlike označimo z Y, torej velja

$$P(Y = k \mid n \notin B) = \binom{n-1}{k} 2^{-n+1}\,.$$

   Z verjetnostjo b/n pa bo število n v množici B in s tem tudi v dani v simetrični razliki. Za prestala števila bo spet veljalo, da bodo v simetrični razliki z verjetnostjo $1/2$, neodvisno drugo od drugega. Sledi

$$P(Y = k \mid n \in B) = \binom{n-1}{k-1} 2^{-n+1}\,.$$

   Ob dogovoru, da je $\binom{m}{r} = 0$, če je $r < 0$ ali $r > m$, torej velja

$$P(Y = k) = \left[\left(1 - \frac{b}{n}\right)\binom{n-1}{k} + \frac{b}{n}\binom{n-1}{k-1}\right] 2^{-n+1}\,.$$

6. (20) Na 8 mest, ki so razporejena v krogu, neodvisno posadimo ničle in enice, tako da je na vsakem mestu ničla z verjetnostjo 1/2 in enica z verjetnostjo 1/2.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da ne bomo dobili nobenega neprekinjenega zaporedja vsaj petih ničel?

Namig: načelo vključitev in izključitev.

Rešitev: Naj bo A dogodek, da smo dobili zaporedje (vsaj) petih ničel. Velja

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8 \,,$$

kjer smo oštevilčili zaporedne peterice mest, A_i pa je dogodek, da so v i-ti peterici same ničle. Po načelu vključitev in izključitev je iskana verjetnost enaka

$$P(A^c) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 + p_8 \,,$$

kjer je p_k vsota verjetnosti vseh možnih presekov k različnih dogodkov A_i (vseh možnih naborov je torej $\binom{8}{k}$). Izračunajmo sedaj vrednosti p_k za vsak k posebej.

- *Ker za vsak i velja $P(A_i) = 2^{-5}$, je očitno $p_1 = 8 \cdot 2^{-5} = 1/4$.*
- *Če sta i-ta in j-ta peterica sosedni, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-6}$; takih neurejenih parov je 8. Če sta zamaknjeni za dve mesti, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-7}$; takih neurejenih parov je spet 8. Sicer pa je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-8}$; takih neurejenih parov je $\binom{8}{2} - 8 - 8 = 12$. Sledi $p_2 = 8 \cdot 2^{-6} + 8 \cdot 2^{-7} + 12 \cdot 2^{-8} = 15/64$.*
- *Če so i-ta, j-ta in k-ta peterica zaporedne, je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-7}$; takih neurejenih trojic je 8. Sicer je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-8}$; takih neurejenih trojic je $\binom{8}{3} - 8 = 48$. Sledi $p_3 = 8 \cdot 2^{-7} + 48 \cdot 2^{-8} = 1/4$.*
- *Brž ko vzamemo nabor več kot treh peteric, le-te pokrijejo vsa mesta, torej je verjetnost ustreznega preseka enaka $2^{-8} = 1/256$. Za $k = 3, 4, \ldots, 8$ torej velja $p_k = \binom{8}{k}/256$.*

Torej je končno

$$P(A^c) = 1 - 4 + \frac{15}{64} - \frac{1}{4} + \frac{70 - 56 + 28 - 8 + 1}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938\,.$$

b. (5) Recimo, da nismo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bomo dobili zaporedje (vsaj) petih enic?

Rešitev: Izračunati je potrebno $P(B \mid A^c)$, kjer je A dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih ničel, B dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih enic. Toda če se zgodi B, se A zagotovo ne zgodi, zato je

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{33}{223} \doteq 0{,}148\,.$$