Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

1. kolokvij

23. 11. 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) V standardnem kupu kart je 52 kart. Po 13 je pikov, src, karov in križev. Karte dobro premešamo in jih razdelimo 4 igralcem, tako da vsak dobi 13 kart.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo imel vsak igralec karte enega samega tipa (tipi so seveda pik, srce, križ in karo)?

Rešitev: Označimo dani dogodek z A. Če ločimo vse karte, ne gledamo pa vrstnega reda deljenja, lahko štirim igralcem razdelimo karte na

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

načinov. Od teh možnih načinov jih je $4! = 24$ takih, ko imajo vsi igralci karte enakega tipa. Iskana verjetnost je

$$P(A) = \frac{4! \cdot (13!)^4}{52!}\,.$$

b. (10) Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo imel prvi igralec karte enega samega tipa, če **nima** vsak igralec kart enega samega tipa?

Rešitev: Naj bo $B = \{$prvi igralec ima karte istega tipa$\}$. Izračunati je treba

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)}\,.$$

Torej moramo izračunati le še $P(B)$. Dogodek B sestavlja $4 \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$ izidov, torej je

$$P(B) = 4 \cdot \frac{13! \cdot 39!}{52!} = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

in iskana pogojna verjetnost je enaka

$$P(B \mid A^c) = \frac{4 \cdot 13!\,\bigl(39! - 3! \cdot (13!)^3\bigr)}{52! - 4! \cdot (13!)^4}\,.$$

2. (20) Kup m rdečih in m črnih kart dobro premešamo, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Označimo z $n = 2m$ število vseh kart. Za fiksen k z $1 \le k \le n$ definiramo

$$A_k = \{k\text{-ta karta od vrha kupa je rdeča}\}$$

in nadalje za $j = 0, 1, \ldots, m$ še

$$B_{k,j} = \{\text{med prvimi } k \text{ vrhnjimi kartami je natanko } j \text{ rdečih}\}\,.$$

a. (10) Za $2 \le k \le n$ izračunajte $P(A_k \cap B_{k-1,j})$, kjer je $\max\{0, k-m\} \le j \le \min\{k-1, m\}$.

Rešitev:

Prvi način. *Ker je število rdečih kart med vrhnjimi $k-1$ kartami porazdeljeno hipergeometrijsko* HiperGeom$(k-1, m, n)$, *je*

$$P(B_{k-1,j}) = \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\binom{k-1}{j}\binom{n-k+1}{m-j}}{\binom{n}{m}}\,.$$

Pogojno na $B_{k-1,j}$ bo k-ta karta izbrana povsem naključno izmed $n-k+1$ preostalih kart, med katerimi je $m-j$ rdečih. Torej bo

$$P(A_k \mid B_{k-1,j}) = \frac{m-j}{n-k+1}$$

in posledično

$$P(A_k \cap B_{k-1,j}) = \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1} = \frac{\binom{k-1}{j}\binom{n-k+1}{m-j}}{\binom{n}{m}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1}\,.$$

Če fiksiramo pozicije v kupu in za izide vzamemo razporeditve rdečih kart, lahko to verjetnost zapišemo tudi neposredno kot

$$P(A_k \cap B_{k-1,j}) = \frac{\binom{k-1}{j}\binom{n-k}{m-j-1}}{\binom{n}{m}}\,.$$

Drugi način. *Opazimo, da je $A_k \cap B_{k-1,j} = A_k \cap B_{k,j+1}$. Ker je število rdečih kart med vrhnjimi k kartami porazdeljeno hipergeometrijsko* HiperGeom(k, m, n), *je*

$$P(B_{k,j+1}) = \frac{\binom{m}{j+1}\binom{m}{k-j-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{k}{j+1}\binom{n-k}{m-j-1}}{\binom{n}{m}}\,.$$

Pogojno na $B_{k,j+1}$ bo k-ta karta izbrana povsem naključno izmed k vrhnjih kart, med katerimi je $j+1$ rdečih. Torej bo

$$P(A_k \mid B_{k-1,j}) = \frac{j+1}{k}$$

in posledično

$$P(A_k \cap B_{k,j+1}) = \frac{\binom{m}{j+1}\binom{m}{k-j-1}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{j+1}{k} = \frac{\binom{k}{j+1}\binom{n-k}{m-j-1}}{\binom{n}{m}} \cdot \frac{j+1}{k}\,.$$

Tretji način. *Velja* $P(A_k) = \frac{1}{2}$, *pogojno na* A_k *pa je število rdečih kart med vrhnjimi* $k-1$ *kartami porazdeljeno hipergeometrijsko* $\mathrm{HiperGeom}(k-1, m-1, n-1)$, *zato je*

$$P(B_{k-1,j} \mid A_k) = \frac{\binom{m-1}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{\binom{k-1}{j}\binom{n-k}{m-1-j}}{\binom{n-1}{m-1}}$$

in posledično

$$P(A_k \cap B_{k-1,j}) = \frac{\binom{m-1}{j}\binom{m}{k-1-j}}{2\binom{n-1}{k-1}} = \frac{\binom{k-1}{j}\binom{n-k}{m-1-j}}{2\binom{n-1}{m-1}} .$$

Krajši račun pokaže, da se vrednosti vseh izrazov ujemajo. Nadalje ob dogovoru, da je $\binom{N}{r} = 0$, *brž ko je* $r < 0$ *ali* $r > N$, *izpeljane formule veljajo tudi brez pogoja* $\max\{0, k-m\} \le j \le \min\{k-1, m\}$.

b. (10) Recimo, da se karte druga za drugo delijo z vrha navzdol. Igralec na srečo lahko po razdeljenih $k-1$ kartah stavi, da bo naslednja karta rdeča. Odloči se, da bo stavil, če bo med še nerazdeljenimi kartami več ali enako rdečih kart kot črnih. Izračunajte verjetnost, da bo igralec stavil in pravilno napovedal rdečo karto. Verjetnost izrazite z ustrezno vsoto, ki je ni treba eksplicitno izračunati.

Rešitev: Če je po $k-1$ *kartah razdeljeno* j *rdečih kart, bo igralec stavil, če bo* $m - j \ge m - [(k-1) - j]$, *ali z drugimi besedami* $k - 1 \ge 2j$. *Iskani dogodek, označimo ga z* S_k, *lahko torej zapišemo kot*

$$S_k = \bigcup_{j;2j \le k-1} \left(A_k \cap B_{k-1,j}\right) .$$

Dogodki v uniji so disjunktni. Ob upoštevanju opombe na koncu rešitve prejšnje točke tako dobimo

$$P(S_k) = \sum_{j;2j \le k-1} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \frac{m-j}{n-k+1} .$$

Vsoto nekoliko predelamo v

$$P(S_k) = \frac{m}{n-k+1} \sum_{j;2j \le k-1} \frac{\binom{m-1}{j}\binom{m}{k-1-j}}{\binom{n}{k-1}} .$$

3. (20) V kupu kart je b belih, r rdečih in dve črni. Karte dobro premešamo in jih polagamo na mizo eno po eno do konca. Naj bo X število belih kart med obema črnima kartama.

a. (10) Utemeljite, da je porazdelitev slučajne spremenljivke X neodvisna od števila rdečih kart.

Rešitev: če karte premešamo in iz permutacije kart izločimo vse rdeče karte, dobimo inducirano permutacijo belih in črnih kart. Vrednost slučajne spremenljivke X *je s to inducirano permutacijo že natančno določena. Nadalje vsako inducirano permutacijo dobimo iz istega števila, tj.* $(b+3)(b+4)\cdots(b+r+2)$ *izvirnih permutacij, zato so tudi vse inducirane permutacije enako verjetne. Tako dobimo, da se porazdelitev slučajne spremenljivke* X *pri poljubnem številu rdečih kart ujema s porazdelitvijo v primeru, ko rdečih kart ni.*

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: možne vrednosti X *so* $k = 0, 1, \ldots, b$. *Računamo samo z belimi in črnimi kartami. Dogodek* $\{X = k\}$ *se zgodi, če sta črni karti na pozicijah* i *in* $i+k+1$ *za* $i = 1, 2, \ldots, b-k+1$. *Načini so disjunktni, verjetnost, da sta črni karti na dveh danih pozicijah, pa je* $\frac{2}{(b+1)(b+2)}$. *Sledi*

$$P(X = k) = \frac{2(b-k+1)}{(b+1)(b+2)}\,.$$

4. (20) Djoković in Nadal igrata tenis. Izid vsake igre je neodvisen od izidov ostalih iger, vsak igralec pa v posamični igri zmaga z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. V nizu zmaga igralec, ki prvi zmaga v vsaj šestih igrah in ima pred nasprotnikom vsaj dve igri prednosti. Naj bo X število iger, ki jih bosta igralca odigrala v nizu.

a. (5) Poiščite $P(X = n)$ za $n = 6, 7, 8, 9, 10$.

Rešitev: dogodek $\{X = n\}$ se lahko zgodi na dva disjunktna načina: (i) v n-ti igri zmaga Djoković, v prvih $n-1$ igrah pa ima 5 zmag. (ii) enako kot (i), le da je ime Nadal. Z uporabo neodvisnosti, simetrije in binomske porazdelitve dobimo

$$P(X = n) = 2 \cdot \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Pospravimo lahko v

$$P(X = n) = \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\,.$$

Konkretno je:

$$P(X = 6) = \frac{1}{32}\,, \quad P(X = 7) = \frac{3}{32}\,, \quad P(X = 8) = \frac{21}{128}\,,$$
$$P(X = 9) = \frac{7}{32}\,, \quad P(X = 10) = \frac{63}{256}\,.$$

b. (5) Izračunajte verjetnost $P(X > 10)$.

Rešitev: Recimo, da je Djoković dobil 10. igro, a s tem ni dobil niza. Tedaj je smel v prvih 9 igrah zmagati največ 4-krat. Če je zmagal natanko 4-krat, sta po 10 igrah izenačena – vsak je zmagal po 5-krat. Če pa je zmagal manj kot 4-krat, to pomeni, da je Nadal v prvih 9 igrah zmagal 6-krat, ob zadnji zmagi pa je imel nujno tudi vsaj dve točki prednosti. To pa pomeni, da je že prej dobil niz in do 10. igre sploh ni prišlo. Podobno sklepamo, če je 10. igro dobil Nadal. Dogodek $\{X > 10\}$ torej pomeni, da sta igralca v prvih 10 igrah izenačena, seveda pa velja tudi obratno: če sta igralca v prvih 10 igrah izenačena, nobeden ni dobil dovolj iger, torej morata igrati še naprej. Binomska porazdelitev nam da

$$P(X > 10) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{63}{256}\,.$$

To pa lahko izračunamo tudi kot $1 - P(X = 6) - P(X = 7) - P(X = 8)$ $- P(X = 9) - P(X = 10)$.

c. (10) Izračunajte $P(X = n)$ še za $n > 10$. Verjetnosti so pozitivne samo za sode n.

Rešitev: za sod n se dogodek $\{X = n\}$ zgodi, če sta igralca po 10 igrah izenačena, v parih iger $(11, 12)$,$(13, 14)$, $\ldots$,$(n-3, n-2)$ sta zmagovalca različna igralca, v paru iger $(n-1, n)$ pa zmaga eden od obeh – v obeh igrah isti. Za vsak blok *(najsi bo vmesni ali končni) je verjetnost ugodnega dogodka enaka* $1/2$ *in dogodki, odvisni od disjunktnih blokov iger, so med sabo neodvisni. Zato za* $m = 6, 7, \ldots$ *velja*

$$P(X = 2m) = P(X > 10) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2m-10}{2}} .$$

Pospravimo v

$$P(X = 2m) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+5} = \frac{63}{2^{m+3}} .$$

5. (20) Po mestu razsaja nevaren virus. Delež okuženih meščanov je enak p. Na vsako še neokuženo osebo, s katero je okuženi posameznik v stiku, se okužba prenese z verjetnostjo t. Zato oblasti lansirajo aplikacijo za sledenje temu virusu. Vsak okuženi posameznik okužbo sporoči aplikaciji z verjetnostjo a, pri tem pa so posamezniki med seboj neodvisni. Brž ko aplikacija izve, da je določena oseba okužena, to sporoči vsem osebam, ki so bile s to osebo v stiku in imajo prav tako to aplikacijo. Privzamemo, da sta pri okuženem posamezniku prenos okužbe na drugo osebo in sporočanje aplikaciji med seboj neodvisna. Privzamemo tudi, da so vse zgoraj navedene verjetnosti strogo med 0 in 1.

a. (5) Gospod Samec živi precej samotarsko življenje na deželi, a ima vseeno naloženo aplikacijo. Oni dan se odpravi v mesto in sreča natanko eno osebo, izbrano povsem naključno, dolgo prej in potem pa nobene. Pred srečanjem ni bil okužen, zdaj pa mu aplikacija javlja, da je bil v stiku z okuženo osebo. Utemeljite, da je pogojna verjetnost, da je ta oseba tudi okužila gospoda Samca, enaka t. Z drugimi besedami, utemeljite, da se pogojni verjetnosti dogodka, da je gospod Samec okužen, glede na dogodek, da je bila oseba, ki jo je srečal, okužena, in glede na dogodek, da ga aplikacija obvesti, da je bil v stiku z okuženo osebo, ujemata.

Rešitev: Označimo s K dogodek, da je bila oseba, s katero je bil gospod Samec v stiku, takrat okužena, s T dogodek, da je okužila gospoda Samca, z A pa dogodek, da je svojo okuženost sporočila aplikaciji (dogodka A in T vzamemo kot poddogodka dogodka K). Ker je gospod Samec srečal povsem naključno osebo, je $P(K) = p$. Po definiciji je $P(T \mid K) = t$ in $P(A \mid K) = a$. Ker sta pri okuženem posamezniku prenos okužbe na drugo osebo in sporočanje aplikaciji med seboj neodvisna, pa je tudi $P(A \cap T \mid K) = at$. Nastavimo

$$P(T \mid A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}\,.$$

Ker je $A, T \subseteq K$, pa je tudi

$$P(T \mid A) = \frac{P(K \cap T \cap A)}{P(K \cap A)} = \frac{P(K)\,P(T \cap A \mid K)}{P(K)\,P(A \mid K)} = \frac{pta}{pa} = t\,.$$

b. (10) Privzemimo zdaj, da gospodu Samcu iz prejšnje točke aplikacija ne poroča o stiku z okuženo osebo. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ga je oseba, s katero je bil v stiku, vendarle okužila?

Rešitev: Iskana pogojna verjetnost je enaka

$$\begin{aligned}
P(T \mid A^c) &= \frac{P(T \cap A^c)}{P(A^c)} = \\
&= \frac{P(T) - P(T \cap A)}{1 - P(A)} = \\
&= \frac{P(T) - P(A)\,P(T \mid A)}{1 - P(A)} = \\
&= \frac{P(K)\,P(T \mid K) - P(K)\,P(A \mid K)\,P(T \mid A)}{1 - P(K)\,P(A \mid K)} = \\
&= \frac{(1-a)pt}{1-ap}\,.
\end{aligned}$$

c. (5) Recimo sedaj, da je prej neokuženi gospod Samec oni dan srečal n ljudi ter spet dolgo prej in potem nobenega. Aplikacija mu poroča, da je bil v stiku s k okuženimi osebami. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je okužen? Privzamemo, da so dogajanja pri osebah, s katerimi je bil gospod Samec v stiku (torej prenos okužbe in sporočanje aplikaciji), med seboj neodvisna.

Rešitev: Podobno kot prej za $i = 1, 2, \ldots, n$ označimo s K_i dogodek, da je bila i-ta oseba, s katero je bil gospod Samec v stiku, takrat okužena, s T_i dogodek, da je okužila gospoda Samca, z A_i pa dogodek, da je svojo okuženost sporočila aplikaciji. Zaradi simetrije je iskana pogojna verjetnost enaka

$$\begin{aligned}
&P\big(T_1 \cup \cdots \cup T_n \;\big|\; A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big) \\
&\quad = 1 - P\big(T_1^c \cap \cdots \cap T_n^c \;\big|\; A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big) \\
&\quad = 1 - \frac{P\big(T_1^c \cap \cdots \cap T_n^c \cap A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big)}{P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big)} \\
&\quad = 1 - \frac{P(T_1^c \cap A_1) \cdots P(T_k^c \cap A_k) \cdot P(T_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) \cdots P(T_n^c \cap A_n^c)}{P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c\big)} \\
&\quad = 1 - P(T_1^c \mid A_1) \cdots P(T_k^c \mid A_k) \cdot P(T_{k+1}^c \mid A_{k+1}^c) \cdots P(T_n^c \mid A_n^c)\,.
\end{aligned}$$

Iz točke a. dobimo

$$P(T_i^c \mid A_i) = 1 - P(T_i \mid A_i) = 1 - t\,,$$

iz točke b. pa dobimo

$$P(T_i^c \mid A_i^c) = 1 - P(T_i \mid A_i^c) = 1 - \frac{(1-a)pt}{1-ap} = \frac{1 - ap - pt + apt}{1-ap}\,.$$

Iskana pogojna verjetnost je torej enaka

$$1 - (1-t)^k \left(\frac{1 - ap - pt + apt}{1-ap}\right)^{n-k}\,.$$