FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

22. 1. 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			●	●	
2.			●	●	
3.			●	●	
4.			●	●	
5.			●	●	
6.				●	
Skupaj					

1. (20) Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $[1,\infty)$ je porazdeljena zvezno z gostoto, ki je na omenjenem poltraku enaka

$$f(t) = \frac{1}{t^2}\,.$$

Za $T \geq 1$ se da enolično zapisati

$$T = (D + R)\cdot 10^N\,,$$

kjer je $D \in \{1,2,\ldots,9\}$, $0 \leq R < 1$ in $N \in \{0,1,2,\ldots\}$. Tako smo definirali nove slučajne spremenljivke N, D in R.

a. (10) Določite skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk N in D.

Rešitev: Za $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ in $d \in \{1,2,\ldots,9\}$ je

$$\begin{aligned}
P(N = n, D = d) &= P\big(d\cdot 10^n \leq T < (d+1)\cdot 10^n\big) \\
&= \int_{d\cdot 10^n}^{(d+1)\cdot 10^n} \frac{1}{t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{d\cdot 10^n} - \frac{1}{(d+1)\cdot 10^n} \\
&= \frac{1}{d(d+1)\cdot 10^n}\,,
\end{aligned}$$

sicer pa je $P(N = n, D = d) = 0$.

b. (10) Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk N in D.

Rešitev: Ker je $P(N = n, D = d)$ produkt funkcije samo spremenljivke n in funkcije samo spremenljivke d, sta slučajni spremenljivki N in D neodvisni. Skupne verjetnosti tako razpadejo na produkt robnih, določiti je treba le še konstanti. To storimo tako, da izračunamo vsoto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9}$$

ali vsoto

$$\sum_{d=1}^{9} \frac{1}{d(d+1)} = \sum_{d=1}^{9}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+1}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}\,.$$

Dobimo:

$$P(N = n) = \frac{9}{10^{n+1}}\,; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

in

$$P(D = d) = \frac{10}{9d(d+1)}\,; \quad n = 1,2,\ldots 9\,.$$

2. (20) V posodi je sprva a belih in b črnih kroglic. Privzemite, da je $n = a + b$ sodo število in označite $m = n/2$. Iz posode povsem naključno in brez vračanja izbiramo pare kroglic, dokler ne izberemo vseh parov. S tem smo kroglice razmestili po parih tako, da je vseh $n!/(m! \cdot 2^m)$ razmestitev enako verjetnih. Naj bo X število parov, v katerih sta obe kroglici beli, Y pa števil parov, v katerih sta obe kroglici črni.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev:

Prvi način: *definiramo*

$$I_k := \begin{cases} 1 & \textit{kroglici v } k\textit{-tem izvlečenem paru sta beli;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = \sum_{k=1}^m I_k$ *in posledično* $E(X) = \sum_{k=1}^m E(I_k)$. *Nadalje lahko kroglici v* k*-tem izvlečenem paru zaradi simetrije obravnavamo kot povsem naključno izbran par izmed vseh kroglic. Sledi*

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = m \cdot \frac{a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,.$$

Drugi način: *bele kroglice oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, a$ *in za* k *iz te množice definiramo*

$$I_k' := \begin{cases} 1 & k\textit{-ta bela kroglica je v paru z belo kroglico;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Tedaj je $X = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^a I_k'$ *in posledično* $E(X) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^a E(I_k')$. *Zaradi simetrije je*

$$E(I_k') = P(I_k' = 1) = \frac{a-1}{n-1}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,,$$

to pa je isto kot prej.

Tretji način: *vse možne pare belih kroglic oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, \binom{a}{2}$ *in za* k *iz te množice definiramo*

$$I_k'' := \begin{cases} 1 & k\textit{-ti par belih kroglic je bil izvlečen skupaj;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Podobno kot pri prvem načinu je $X = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} I_k''$ *in posledično* $E(X) = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} E(I_k'')$. *Zaradi simetrije je*

$$E(I_k'') = P(I_k'' = 1) = \frac{1}{n-1}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = \binom{a}{2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,,$$

to pa je spet isto kot prej.

b. (10) Izračunajte $E(XY)$.

Rešitev:

Prvi način: *poleg indikatorjev iz prvega načina rešitve prejšnje točke definiramo še*

$$J_l = \begin{cases} 1 & \text{kroglici v } l\text{-tem izvlečenem paru stačrni;} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Pišimo

$$XY = \sum_{k=1}^{m} I_k J_k + \sum_{\substack{1 \le k, l \le m \\ k \ne l}} I_k J_l$$

in opazimo, da je $I_k J_k = 0$ *za vse* k. *Podobno kot prej z uporabo linearnosti dobimo, da je*

$$E(XY) = \sum_{\substack{1 \le k, l \le m \\ k \ne l}} E(I_k J_l)\,.$$

Vemo, da je

$$E(I_k J_l) = P(I_k = 1, J_l = 1)\,.$$

Spet lahko kroglice v k*-tem in* l*-tem izvlečenem paru zaradi simetrije gledamo kot naključno izbrano četverico kroglic. Verjetnost, da sta prvi dve beli, drugi dve pa črni, je*

$$P(I_k = 1, J_l = 1) = \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,.$$

Vseh parov s $k \ne l$ *je* $m(m-1)$. *Sledi*

$$E(XY) = m(m-1) \cdot \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{4(n-1)(n-3)}\,.$$

Drugi način: *še črne kroglice oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, b$ *in za* l *iz te množice definiramo:*

$$J_l' := \begin{cases} 1 & l\text{-ta črna kroglica je v paru s črno kroglico;} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

velja

$$XY = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{a} \sum_{l=1}^{b} I'_k J'_k \,, \qquad \textit{torej} \qquad E(XY) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{a} \sum_{l=1}^{b} E(I'_k J'_k)$$

in zaradi simetrije

$$E(I'_k J'_l) = P(I'_k = 1, J'_l = 1) = \frac{(a-1)(b-1)}{(n-1)(n-3)} \,.$$

Sledi

$$E(XY) = \frac{ab(a-1)(b-1)}{4(n-1)(n-3)} \,,$$

kar je isto kot prej.

Tretji način: *še vse možne pare črnih kroglic oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, \binom{b}{2}$ *in za* l *iz te množice definiramo:*

$$J''_l := \begin{cases} 1 & l\textit{-ti par črnih kroglic je bil izvlečen skupaj;} \\ 0 & \textit{sicer,} \end{cases}$$

velja

$$XY = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} \sum_{l=1}^{\binom{b}{2}} I''_k J''_k \,, \qquad \textit{torej} \qquad E(XY) = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} \sum_{l=1}^{\binom{b}{2}} E(I''_k J''_k)$$

in zaradi simetrije

$$E(I''_k J''_l) = P(I''_k = 1, J''_l = 1) = \frac{1}{(n-1)(n-3)} \,.$$

Sledi

$$E(XY) = \binom{a}{2}\binom{b}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)(n-3)} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{4(n-1)(n-3)} \,,$$

kar je spet isto kot prej.

3. (20) Slučajni par (T, X) naj ima gostoto

$$f_{T,X}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

za $t > 0$ in $x \in \mathbb{R}$; sicer je gostota enaka nič.

a. (10) Naj bosta para (T, X) in (T', X') neodvisna z enako gostoto. Označite $(T + T', X + X') = (S, Y)$. Izračunajte

$$\frac{f_{S,Y}(s,y)}{f_S(s)}\,.$$

Rešitev: definiramo preslikavo

$$\Phi(t,x,t',x') = (t, x, t+t', x+x')\,.$$

in opazimo, da je Φ *bijekcija iz množice*

$$A := \big\{(t,x,t',x')\,;\; x, x' \in \mathbb{R},\; t, t' > 0\big\}$$

na množico

$$B := \big\{(t,x,s,y)\,;\; x, y \in \mathbb{R},\; 0 < t < s\big\}\,.$$

Nadalje za vse $(t,x,s,y) \in B$ *velja*

$$\Phi^{-1}(t,x,s,y) = (t, x, s-t, y-x)\,,$$

Jacobijeva determinanta pa je enaka 1*. Za* $(t,x,s,y) \in B$ *je torej*

$$f_{T,X,S,Y}(t,x,s,y) = f_{T,X}(t,x)\, f_{T,X}(s-t, y-x)\,.$$

Iskana gostota je robna gostota, zato moramo integrirati po t *in* x*. Računamo*

$$\begin{aligned}
f_{S,Y}(s,y) &= \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} f_{T,X,S,Y}(t,x,s,y)\,dx\,dt \\
&= \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)^3}}\, e^{-\frac{1}{2(s-t)}} \cdot \\
&\qquad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2(s-t)}}\,dx\,dt \\
&= \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi (s-t)^3}}\, e^{-\frac{1}{2(s-t)}}\,dt \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{y^2}{2s}} \\
&= f_{T+T'}(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{y^2}{2s}}\,.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je notranji integral konvolucija dveh normalnih gostot, zunanji pa konvolucija gostot T in T'. Torej je

$$\frac{f_{S,Y}(s,y)}{f_S(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{y^2}{2s}}\,.$$

b. (10) Kot znano privzemite, da imata slučajni spremenljivki $4T$ in S enako gostoto. Izračunajte gostote slučajnih spremenljivk X, X' in $X + X'$.

Rešitev: gostoto slučajne spremenljivke X oziroma X' dobimo kot robno gostoto para (T, X), torej kot integral

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi t^2}\, e^{-\frac{1+x^2}{2t}}\, dt\,.$$

S substitucijo $u = (1 + x^2)/(2t)$, $du = -(1 + x^2)/(2t^2)$ dobimo

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,.$$

Iz vnaprej znanega dejstva sledi

$$f_S(s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi s^3}}\, e^{-\frac{2}{s}}\,,$$

iz prvega dela naloge pa nato

$$f_{S,Y}(s,y) = \frac{1}{\pi s^2}\, e^{-\frac{4+y^2}{2s}}\,.$$

Gostoto slučajne spremenljivke Y dobimo kot robno gostoto gostote iz prvega dela naloge. Podobno kot prej nam integracija da

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi(4+y^2)}\,.$$

4. (20) Naj bosta $n \leq N$ naravni števili. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ naj imajo skupno porazdelitev, določeno s

$$P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n+1} = k_{n+1}\big) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

za $(n+1)$-terice $(k_1, \ldots, k_{n+1})$ celih števil, za katere je $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = N - n$; sicer je $P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n+1} = k_{n+1}\big) = 0$. Naj bo $1 \leq m \leq n$.

a. (5) Izračunajte pričakovano vrednost $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)$.

   Namig: uporabite simetrijo.

   Rešitev: zaradi simetrije imajo vsi X_k enako porazdelitev in posledično enako pričakovano vrednost. Ker je

$$E(X_1 + \cdots + X_{n+1}) = N - n\,,$$

   je

$$E(X_k) = \frac{N-n}{n+1}\,.$$

   Sledi

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = \frac{m(N-n)}{n+1}\,.$$

b. (15) Poiščite porazdelitev vsote $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$.

   Namig: lahko si pomagate s porazdelitvijo izvirnega slučajnega vektorja.

   Rešitev: dogodek, da je dana vsota enaka l, je možen le, če je $0 \leq l \leq N - n$. Ker so vse možne $(n+1)$-terice $(k_1, \ldots, k_{n+1})$ enako verjetne, moramo le prešteti vse tiste, pri katerih je $k_1 + \cdots + k_m = l$ in $k_{m+1} + \cdots + k_{n+1} = N - n - l$. Iz kombinatorike (kombinacije s ponavljanjem) ali izvirne porazdelitve dobimo, da je takih $(n+1)$-teric

$$\binom{l+m-1}{m-1}\binom{N-n-l+(n+1-m)-1}{(n+1-m)-1} = \binom{l+m-1}{m-1}\binom{N-l-m}{n-m}\,.$$

   Sledi

$$P(X_1 + \cdots + X_m = l) = \frac{\binom{l+m-1}{m-1}\binom{N-l-m}{n-m}}{\binom{N}{n}}\,.$$

5. (20) Posoda sprva vsebuje $a \geq 1$ belih in $b \geq 1$ črnih kroglic. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico, tako da ima vsaka enako verjetnost, da bo izbrana, neodvisno od prejšnjih izbir. Ko izvlečemo kroglico, v posodo vselej dodamo belo kroglico; tako je skupno število kroglic med izbiranji ves čas enako, število belih kroglic pa se ne more zmanjšati.

a. (10) Naj bo X_k število belih kroglic v posodi po k-tem koraku. Pokažite, da je

$$E(X_k) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^k .$$

Namig: izračunajte $E(X_{k+1} \mid X_k = j)$.

Rešitev: poglejmo najprej $E(X_1)$. Slučajna spremenljivka X_1 ima ali vrednost a z verjetnostjo $a/(a+b)$ ali $a+1$ z verjetnostjo $b/(a+b)$. Sledi, da je

$$E(X_1) = a \cdot \frac{a}{a+b} + (a+1) \cdot \frac{b}{a+b} = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Za $k > 1$ in $a \leq j \leq a+k$ pa velja

$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = j) = \frac{j}{a+b} \quad \textit{in} \quad P(X_{k+1} = j+1 \mid X_k = j) = \frac{a+b-j}{a+b} ,$$

torej

$$E(X_{k+1} \mid X_k = j) = j \cdot \frac{j}{a+b} + (j+1) \cdot \frac{a+b-j}{a+b} = 1 + j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) .$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \sum_{j=a}^{a+k} E(X_{k+1} \mid X_k = j) P(X_k = j) \\ &= \sum_{j=a}^{a+k} \left[1 + j\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)\right] P(X_k = j) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E(X_k) . \end{aligned}$$

Formula za $E(X_k)$ drži za $k = 1$, naprej pa jo preverimo z indukcijo.

b. (10) Izračunajte verjetnost, da pri k-tem izbiranju izberemo belo kroglico.

Rešitev:

Prvi način. *Naj bo* $A_k = \big\{$*pri* k*-tem izbiranju izberemo belo kroglico*$\big\}$. *Po formuli za popolno verjetnost je*

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{j=a}^{a+k-1} P(A_k \mid X_{k-1} = j)\, P(X_{k-1} = j) \\ &= \sum_{j=a}^{a+k-1} \frac{j}{a+b} \cdot P(X_{k-1} = j) \\ &= \frac{1}{a+b} \cdot E(X_{k-1}) \\ &= 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^{k-1} . \end{aligned}$$

Drugi način. *Opazimo, da je* $X_k - X_{k-1}$ *indikator komplementa dogodka* A_k. *Sledi*

$$\begin{aligned} P(A_k) &= 1 - E(X_k - X_{k-1}) \\ &= E(X_{k-1}) - E(X_k) + 1 \\ &= E(X_{k-1}) - \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E(X_{k-1}) \\ &= \frac{1}{a+b} \cdot E(X_{k-1})\,, \end{aligned}$$

kar je isto kot prej.

6. (20) Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ slučajne spremenljivke z $\mathrm{var}(Y_k) = \sigma^2$ za vse $k = 1, 2, \ldots, n$ in $\mathrm{corr}(Y_k, Y_l) = \rho$ za $k \neq l$; pri tem sta σ^2 in ρ konstanti. Označimo $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$.

a. (5) Izračunajte $\mathrm{cov}(Y_k, \bar{Y})$ in $\mathrm{var}(\bar{Y})$.

Rešitev: iz bilinearnosti kovariance sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_k, \bar{Y}) &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n \mathrm{cov}(Y_k, Y_l) \\
&= \frac{1}{n}\left(\mathrm{cov}(Y_k, Y_k) + \sum_{l;\, l \neq k} \mathrm{cov}(Y_k, Y_l)\right) \\
&= \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right)
\end{aligned}$$

in nadalje:

$$\mathrm{var}(\bar{Y}) = \mathrm{cov}(\bar{Y}, \bar{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{cov}(Y_k, \bar{Y}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right).$$

b. (5) Dokažite, da obstaja tak $c \in \mathbb{R}$, da je $\mathrm{cov}(Y_k - c\bar{Y}, Y_l - c\bar{Y}) = 0$ za vse $k \neq l$.

Rešitev: velja

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}\big(Y_k - c\bar{Y},\, Y_l - c\bar{Y}\big) \\
&\quad = \mathrm{cov}(Y_k, Y_l) - 2c \cdot \mathrm{cov}(Y_k, \bar{Y}) + c^2 \cdot \mathrm{var}(\bar{Y}) \\
&\quad = \sigma^2\left[\rho - 2c\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right) + c^2\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right)\right].
\end{aligned}$$

Dobili smo kvadratno enačbo z diskriminanto

$$D = 4\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right)^2 - 4\rho\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\rho\right) = \frac{4}{n^2}\big(1 + (n-1)\rho\big)(1-\rho).$$

Desni faktor je vedno nenegativen, saj je vselej $-1 \leq \rho \leq 1$. Levi faktor pa je nenegativen za $\rho \geq -1/(n-1)$: le takrat bo imela kvadratna enačba realno rešitev.

c. (10) Označimo $E(Y_k) = \mu_k$ in privzemimo, da je $\sum_{k=1}^n \mu_k = 0$. Vzemimo števila $c_1, c_2, \ldots, c_n$, za katera velja $\sum_{k=1}^n c_k \mu_k = 1$. Naj bo

$$Z := \sum_{k=1}^n c_k Y_k.$$

Definirajmo še

$$S := \sum_{k=1}^n \mu_k^2, \qquad c_k^* := \frac{\mu_k}{S} \quad \text{in} \quad Z^* := \sum_{k=1}^n c_k^* Y_k.$$

Izračunajte $\operatorname{cov}(Z - Z^*,\, Z^*)$ in od tod sklepajte, da je $\operatorname{var}(Z) \ge \operatorname{var}(Z^*)$.

Rešitev: s pomočjo bilinearnosti izračunamo

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z - Z^*,\, Z^*) &= \sigma^2\left[\sum_{k=1}^n (c_k - c_k^*)c_k^* + \rho\sum_{k\neq l}(c_k - c_k^*)c_k^*\right] = \\ &= \sigma^2\left[(1-\rho)\sum_{k=1}^n (c_k - c_k^*)c_k^* + \rho\sum_{k=1}^n (c_k - c_k^*)\sum_{l=1}^n c_l^*\right].\end{aligned}$$

Iz predpostavke, da je $\sum_{k=1}^n \mu_k = 0$*, sledi, da je tudi* $\sum_{k=1}^n c_k^* = 0$*. Nadalje je:*

$$\sum_{k=1}^n c_k c_k^* = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^n c_k \mu_k = \frac{1}{S}\,.$$

To velja tudi za $c_k = c_k^*$*. Sledi* $\sum_{k=1}^n (c_k - c_k^*)c_k^* = 0$ *in* $\operatorname{cov}(Z - Z^*, Z^*) = 0$*. Spet iz bilinearnosti kovariance končno dobimo*

$$\operatorname{var}(Z) = \operatorname{var}(Z - Z^* + Z^*) = \operatorname{var}(Z - Z^*) + \operatorname{var}(Z^*)\,.$$

Ker so variance vedno nenegativne, sklep sledi.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

2. kolokvij

22. 1. 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.				•	
Skupaj					

5. (20) *Ehrenfestov model* opisuje prehajanje molekul iz enega predela dvodelne posode v drugega. V obeh predelih je skupaj N molekul. Na posameznem koraku se povsem naključno izbere kroglica (torej vsaka z enako verjetnostjo, ne glede na to, v katerem predelu je), nakar se ta kroglica prestavi v drug predel posode, ostale pa ostanejo tam, kjer so. Recimo, da ima posoda levi in desni del. Za $n = 0, 1, 2, \ldots$ naj bo X_n število molekul v levem predelu posode po n korakih.

a. (5) Za vse $n = 0, 1, 2, \ldots$ in $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ izračunajte $E(X_{n+1} \mid X_n = k)$.

Rešitev: iz modela razberemo, da je

$$P\big(X_{n+1} = k - 1 \bigm| X_n = k\big) = \frac{k}{N} \quad \textit{in} \quad P\big(X_{n+1} = k - 1 \bigm| X_n = k\big) = \frac{N-k}{N} \,,$$

od koder sledi

$$E(X_{n+1} \mid X_n = k) = (k-1)\,\frac{k}{N} + (k+1)\,\frac{N-k}{N} = \left(1 - \frac{2}{N}\right) k + 1 \,.$$

b. (10) Privzemimo, da na začetku, torej pri $n = 0$, v levem delu posode ni molekul. Izračunajte $E(X_1)$, $E(X_2)$ in $E(X_3)$.

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) E(X_{n+1} \mid X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) \left[\left(1 - \frac{2}{N}\right) k + 1\right] \\ &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_n) + 1 \,. \end{aligned}$$

Nadalje je $E(X_0) = 0$. Od tod izračunamo

$$E(X_1) = 1 \,, \qquad E(X_2) = 2 - \frac{2}{N} \,, \qquad E(X_3) = 3 - \frac{6}{N} + \frac{4}{N^2} \,.$$

c. (5) Izračunajte $\lim_{n\to\infty} E(X_n)$. Kot znano privzemite, da ta limita obstaja.

Rešitev: če iskano limito označimo z L, mora zanjo veljati zveza

$$L = \left(1 - \frac{2}{N}\right) L + 1 \,.$$

Razrešimo in dobimo $L = \frac{N}{2}$.