

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

2. KOLOKVIJ

21. 1. 2026

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.				•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Naj bo X nenegativna zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto f_X .

- a. (10) Pokažite, da je $E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$. Upoštevajte, da Fubinijev izrek vedno velja za nenegativne integrande.

Rešitev: po definiciji gostote je

$$P(X > t) = \int_t^\infty f_X(x)dx.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(X > t)dt &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty f_X(x)dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^x dt \right) f_X(x)dx \\ &= \int_0^\infty x f_X(x)dx \\ &= E(X). \end{aligned}$$

Pri spremembi vrstnega reda integriranja smo uporabili Fubinijev izrek.

- b. (10) Naj bo $X \sim \exp(\lambda)$ za $\lambda > 0$. Uporabite prvi del naloge za izračun $E(X)$.

Rešitev: velja $P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$. Računamo

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

2. (20) Janez Novak je v svojem podjetju odgovoren za pritožbe strank. Uprava želi modelirati število pritožb od ponedeljka do petka. Privzetek je, da so števila pritožb nenegativne celoštevilске slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . Celotno število pritožb na teden označimo z $S = X_1 + X_2 + \dots + X_5$.

Kot znano privzemite, da je za $l \geq 1$

$$\sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} a^k b^{l-k} = la(a+b)^{l-1},$$

in

$$\sum_{l=1}^{\infty} la^{l-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

ter

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^2 a^{l-1} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

za $|a| < 1$.

- a. (5) Privzemite najprej, da so X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 neodvisne z $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Navedite porazdelitev S in $\text{var}(S)$.

Rešitev: vemo, da so vsote neodvisnih Poissonovih slučajnih spremenljivk Poissonove porazdeljene, torej $S \sim \text{Po}(5\lambda)$. Iz tega tudi sledi $\text{var}(S) = 5\lambda$.

- b. (10) V alternativnem modelu, kjer ne privzamemo neodvisnosti, privzemamo, da so vse X_1, X_2, \dots, X_5 enako porazdeljene in velja

$$P(X_1 = k, S = l) = \frac{l!}{k! \cdot (l-k)!} \cdot \frac{4^{l-k}}{6^{l+1}}$$

za $0 \leq k \leq l$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Izračunajte

$$E(X_1 \cdot S).$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot S) &= \sum_{0 \leq k \leq l} klP(X_1 = k, S = l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{6} \sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} \frac{4^{l-k}}{6^l} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2}{6^2} \left(\frac{5}{6}\right)^{l-1} \\ &= 11. \end{aligned}$$

c. (5) Izračunajte $\text{cov}(X_1, S)$ v alternativnem modelu.

Rešitev: potrebujemo $E(X_1)$ in $E(S)$. Računamo

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{0 \leq k \leq l} kP(X_1 = k, S = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{6} \sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} \frac{4^{l-k}}{6^l} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{6^2} \left(\frac{5}{6}\right)^{l-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ker so X_i enako porazdeljene, je $E(S) = 5$ in posledično $\text{cov}(X_1, S) = 6$.

3. (20) Naj bosta X, Y neodvisni standardizirano normalni slučajni spremenljivki. Preslikava

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

preslika odprto množico $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bijektivno nase. Definiramo

$$(U, V) = \Phi(X, Y) = \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right).$$

a. (10) Najdite gostoto para (U, V) .

Rešitev: opazimo, da je preslikava Φ sama sebi inverz, torej

$$(x, y) = \Phi(u, v).$$

Označimo $r^2 = u^2 + v^2$. Računamo

$$J_{\Phi^{-1}}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{v^2 - u^2}{r^4} & -\frac{2uv}{r^4} \\ -\frac{2uv}{r^4} & \frac{u^2 - v^2}{r^4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^4}.$$

Po transformacijski formuli je

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y} \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \cdot \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{1}{2\pi(u^2 + v^2)^2} e^{-\frac{1}{2(u^2 + v^2)}} \end{aligned}$$

za $(u, v) \neq (0, 0)$.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke $W = U^2 + V^2$.

Rešitev:

Prvi način: računamo s pomočjo polarnih koordinat in dejstva, da je gostota rotacijsko simetrična:

$$\begin{aligned} P(W \leq w) &= P(U^2 + V^2 \leq w) \\ &= \iint_{u^2 + v^2 \leq w} f_{U,V}(u, v) du dv \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{w}} \frac{1}{2\pi \rho^4} e^{-\frac{1}{2\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \left(e^{-\frac{1}{2\rho^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{w}} \\ &= e^{-\frac{1}{2w}}. \end{aligned}$$

Z odvajanjem sledi

$$f_W(w) = \frac{1}{2w^2} e^{-\frac{1}{2w}}.$$

Drugi način: vemo, da sta X^2 in Y^2 neodvisni z $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ porazdelitvijo. Sledi, da je $X^2 + Y^2$ porazdeljena po $\Gamma(1, \frac{1}{2})$ zakonu, torej eksponentno s parametrom $\frac{1}{2}$. Računamo za $w > 0$

$$\begin{aligned} P(U^2 + V^2 \leq w) &= P\left(\frac{1}{X^2 + Y^2} \leq w\right) \\ &= P\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{1}{w}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2w}}. \end{aligned}$$

Odvajanje nam da

$$f_W(w) = \frac{1}{2w^2} e^{-\frac{1}{2w}}.$$

4. (20) V posodi je sprva b belih in 2 rdeči kroglici. Na vsakem koraku iz posode na slepo izberemo eno kroglico, nakar jo vrnemo v posodo in dodamo še eno kroglico enake barve. Definirajmo slučajni spremenljivki

$$X := \text{število izvlečenih belih kroglic pred prvo izvlečeno rdečo,}$$

$$Y := \begin{cases} 1 & \text{; takoj za prvo rdečo kroglico izvlečemo belo;} \\ 0 & \text{; takoj za prvo rdečo kroglico izvlečemo rdečo.} \end{cases}$$

Kot znano privzemite, da je za $a > 0$ in $r = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)\cdots(a+k+r)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)}.$$

a. (5) Za $k = 1, 2, 3, \dots$ izračunajte $E(Y | X = k)$.

Rešitev: če je $X = k$, je, potem ko izvlečemo prvo rdečo kroglico in jo vrnemo v posodo, tam $b+k$ belih in 3 rdeče kroglice. Torej je

$$E(Y | X = k) = \frac{b+k}{b+k+3}.$$

b. (5) Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: pogojujemo na X . Najprej za $k = 0, 1, 2, \dots$ izračunamo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1) \cdot 2}{(b+2)(b+3)\cdots(b+k+1)(b+k+2)} = \\ &= \frac{2b(b+1)}{(b+k)(b+k+1)(b+k+2)}, \end{aligned}$$

nato pa po izreku o popolni pričakovani vrednosti in ob upoštevanju dane identitete še

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b+k+1)(b+k+2)(b+k+3)} \\ &= \frac{b}{b+2}. \end{aligned}$$

c. (10) Izračunajte $\text{cov}(X, Y)$.

Rešitev:

neposredno izračunamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(b+k)(b+k+1)(b+k+2)} \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b+k-b}{(b+k)(b+k+1)(b+k+2)} \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b+k+1)(b+k+2)} - \\
&\quad - 2b^2(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b+k)(b+k+1)(b+k+2)} \\
&= 2b - b = b,
\end{aligned}$$

nato pa s pomočjo izreka o popolni pričakovani vrednosti še

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) E(XY | X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) E(kY | X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) E(Y | X = k) \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(b+k+1)(b+k+2)(b+k+3)} \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b+k+1-b-1}{(b+k+1)(b+k+2)(b+k+3)} \\
&= 2b(b+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b+k+2)(b+k+3)} \\
&\quad - 2b(b+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b+k+1)(b+k+2)(b+k+3)} \\
&= \frac{2b(b+1)}{b+2} - \frac{b(b+1)}{b+2} \\
&= \frac{b(b+1)}{b+2}.
\end{aligned}$$

Poberemo skupaj in dobimo

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{b(b+1)}{b+2} - \frac{b^2}{b+2} = \frac{b}{b+2}.$$

5. (20) Celoštevilske slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots naj imajo vrednosti v množici $\{0, 1, \dots, m\}$ ter naj velja

$$P(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = \frac{m - k}{m} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = \frac{k}{m}$$

za vse $n \geq 0$ in vse $k = 0, 1, \dots, m$. Rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_n označimo z G_n .

- a. (10) Izpeljite zvezo med rodovnima funkcijama spremenljivk X_n in X_{n+1} . V zvezi bodo nastopali tudi odvodi rodovne funkcije G_n .

Rešitev: iz predpostavk najprej sledi

$$E(s^{X_{n+1}} | X_n = k) = s^{k+1} \cdot \frac{m - k}{m} + s^{k-1} \cdot \frac{k}{m}.$$

Obe strani enačbe pomnožimo s $P(X_n = k)$ in seštejemo po $k = 0, 1, \dots, m$. Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(s^{X_{n+1}}) &= \sum_{k=0}^m E(s^{X_{n+1}} | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(s^{k+1} \cdot \frac{m - k}{m} + s^{k-1} \cdot \frac{k}{m} \right) P(X_n = k) \\ &= s G_n(s) - \frac{s^2}{m} G_n'(s) + \frac{1}{m} G_n'(s). \end{aligned}$$

- b. (10) Kakšna bi morala biti porazdelitev slučajne spremenljivke X_0 , da bi imele vse slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots enako porazdelitev?

Rešitev: najprej ugotovimo, da morata imeti X_0 in X_1 enako porazdelitev. Označimo rodovno funkcijo te neznanе porazdelitve z G . Veljati bi moralo

$$G(s) = s G(s) - \frac{s^2}{m} G'(s) + \frac{1}{m} G'(s),$$

kar je diferencialna enačba prvega reda. Prepišemo v

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{m}{1 + s}$$

in sledi

$$\log G(s) = m \log(1 + s) + \log c$$

za neko konstanto $c > 0$. Ker mora biti $G(1) = 1$, sledi $\log c = -m \log 2$ in posledično

$$G(s) = \left(\frac{1 + s}{2} \right)^m.$$

Dobili smo rodovno funkcijo binomske porazdelitve $\text{Bin}(m, \frac{1}{2})$. Po indukciji sledi, da imajo v tem primeru vse spremenljivke X_0, X_1, \dots enako porazdelitev.

6. (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 3$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; vse kocke so standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Označimo z W število parov *sosebnjih* kockarjev, za katere velja, da oba vržeta sosebnji števili pik. Števili iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta sosebnji, če se razlikujeta za 1 (3 in 4 sta torej sosebnji, 6 in 1 pa ne, prav tako tudi ne 3 in 3).

a. (10) Izračunajte $E(W)$ in $\text{var}(W)$.

Rešitev: pišimo $W = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, kjer je I_i indikator dogodka, da i -ti kockar in njegov desni sosed vržeta sosebnji števili pik. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18},$$

torej je:

$$E(W) = \frac{5n}{18}.$$

Za varianco računamo

$$\text{var}(W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(I_i, I_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i I_j) - E(I_i)E(I_j).$$

Za $i = j$ je $\text{cov}(I_i, I_j) = 5/18 - (5/18)^2 = 65/324$. Če sta i -ti in j -ti kockar sosebnja, je slučajna spremenljivka $I_i I_j$ je indikator dogodka, da za i -tega in j -tega kockarja velja, da s svojima desnima sosebdoma vržeta sosebnje število pik. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i I_j) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12};$$

takih členov je v zgornji vsoti $2n$ (n -ti igravec ima na desni prvega za soseda). Posledično je

$$\text{cov}(I_i, I_j) = 1/12 - 25/324 = 1/162.$$

V vseh ostalih primerih pa je $\text{cov}(I_i, I_j) = 0$: dogodka, da soseda i -tega in soseda j -tega kockarja vržeta sosebnje število pik, sta neodvisna. Seštejemo in dobimo:

$$\text{var}(W) = n \cdot \frac{65}{324} + 2n \cdot \frac{1}{162} = \frac{23n}{108}.$$

b. (10) Naj bo S število kockarjev, ki vržejo šest pik. Izračunajte $\text{cov}(W, S)$.

Rešitev: pišimo $S = J_1 + J_2 + \dots + J_n$, kjer je J_j indikator dogodka, da j -ti kockar vrže šest pik. Za izračun kovariance med W in S sta spet dva standardna načina. Lahko nastavimo:

$$\text{cov}(W, S) = E(WS) - E(W)E(S)$$

in

$$E(W S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i J_j).$$

Slučajna spremenljivka $I_i J_j$ je indikator dogodka, da i -ti kockar in njegov desni sosed vržeta sosednji števili pik, j -ti kockar pa vrže šest pik. Za $i = j$ je to dogodek, da i -ti kockar vrže šest pik, njegov desni sosed pa pet pik; verjetnost tega dogodka enaka $1/36$ in takih členov je v zgodnji dvojni vsoti n . Če je j -ti kockar desni sosed i -tega kockarja, je to dogodek, da j -ti kockar vrže šest, i -ti pa pet pik; verjetnost tega dogodka je spet enaka $1/36$ in takih členov je v zgodnji dvojni vsoti spet n . Če pa j -to kockar ni niti enak i -temu niti ni njegov desni sosed, pa je verjetnost tega dogodka enaka $(1/6) \cdot (5/18) = 5/108$; takih členov je v zgornji vsoti $n^2 - 2n$. Seštejemo in dobimo:

$$E(W S) = 2n \cdot \frac{1}{36} + (n^2 - 2n) \cdot \frac{5}{108} = \frac{5n^2 - 4n}{108}.$$

Očitno je $E(J_j) = 1/6$ in posledično $E(S) = n/6$. Odštejemo in dobimo:

$$\text{var}(W) = -\frac{n}{27}.$$

Do tega pa lahko spet pridemo tudi s kovariancami – nastavimo:

$$\text{cov}(W, S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(I_i, J_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i J_j) - E(I_i)E(J_j).$$

Če je $i = j$ ali pa je j -ti kockar desni sosed i -tega, je $\text{cov}(I_i, J_j) = 1/36 - 5/108 = -1/54$, sicer pa je $\text{cov}(I_i, J_j) = 0$. Seštejemo in dobimo:

$$\text{cov}(W, S) = -\frac{n}{27},$$

kar je isto kot prej.

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

PEDAGOŠKA MATEMATIKA

VERJETNOST

2. KOLOKVIJ

21. 1. 2026

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.				•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Naj bo X nenegativna zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto f_X .

- a. (10) Pokažite, da je $E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$. Upoštevajte, da Fubinijev izrek vedno velja za nenegativne integrande.

Rešitev: po definiciji gostote je

$$P(X > t) = \int_t^\infty f_X(x)dx.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(X > t)dt &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty f_X(x)dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^x dt \right) f_X(x)dx \\ &= \int_0^\infty x f_X(x)dx \\ &= E(X). \end{aligned}$$

Pri spremembi vrstnega reda integriranja smo uporabili Fubinijev izrek.

- b. (10) Naj bo $X \sim \exp(\lambda)$ za $\lambda > 0$. Uporabite prvi del naloge za izračun $E(X)$.

Rešitev: velja $P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$. Računamo

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

2. (20) Janez Novak je v svojem podjetju odgovoren za pritožbe strank. Uprava želi modelirati število pritožb od ponedeljka do petka. Privzetek je, da so števila pritožb nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . Celotno število pritožb na teden označimo z $S = X_1 + X_2 + \dots + X_5$.

Kot znano privzemite, da je za $l \geq 1$

$$\sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} a^k b^{l-k} = la(a+b)^{l-1},$$

in

$$\sum_{l=1}^{\infty} la^{l-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

ter

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^2 a^{l-1} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

za $|a| < 1$.

- a. (5) Privzemite najprej, da so X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 neodvisne z $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Navedite porazdelitev S in $\text{var}(S)$.

Rešitev: vemo, da so vsote neodvisnih Poissonovih slučajnih spremenljivk Poissonove porazdeljene, torej $S \sim \text{Po}(5\lambda)$. Iz tega tudi sledi $\text{var}(S) = 5\lambda$.

- b. (10) V alternativnem modelu, kjer ne privzamemo neodvisnosti, privzemamo, da so vse X_1, X_2, \dots, X_5 enako porazdeljene in velja

$$P(X_1 = k, S = l) = \frac{l!}{k! \cdot (l-k)!} \cdot \frac{4^{l-k}}{6^{l+1}}$$

za $0 \leq k \leq l$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Izračunajte

$$E(X_1 \cdot S).$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot S) &= \sum_{0 \leq k \leq l} klP(X_1 = k, S = l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{6} \sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} \frac{4^{l-k}}{6^l} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2}{6^2} \left(\frac{5}{6}\right)^{l-1} \\ &= 11. \end{aligned}$$

c. (5) Izračunajte $\text{cov}(X_1, S)$ v alternativnem modelu.

Rešitev: potrebujemo $E(X_1)$ in $E(S)$. Računamo

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{0 \leq k \leq l} kP(X_1 = k, S = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{6} \sum_{k=0}^l k \binom{l}{k} \frac{4^{l-k}}{6^l} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{6^2} \left(\frac{5}{6}\right)^{l-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ker so X_i enako porazdeljene, je $E(S) = 5$ in posledično $\text{cov}(X_1, S) = 6$.

3. (20) Naj bosta X, Y neodvisni standardizirano normalni slučajni spremenljivki. Preslikava

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

preslika odprto množico $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bijektivno nase. Definiramo

$$(U, V) = \Phi(X, Y) = \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right).$$

a. (10) Najdite gostoto para (U, V) .

Rešitev: opazimo, da je preslikava Φ sama sebi inverz, torej

$$(x, y) = \Phi(u, v).$$

Označimo $r^2 = u^2 + v^2$. Računamo

$$J_{\Phi^{-1}}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{v^2 - u^2}{r^4} & -\frac{2uv}{r^4} \\ -\frac{2uv}{r^4} & \frac{u^2 - v^2}{r^4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^4}.$$

Po transformacijski formuli je

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y} \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \cdot \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{1}{2\pi(u^2 + v^2)^2} e^{-\frac{1}{2(u^2 + v^2)}} \end{aligned}$$

za $(u, v) \neq (0, 0)$.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke $W = U^2 + V^2$.

Rešitev:

Prvi način: računamo s pomočjo polarnih koordinat in dejstva, da je gostota rotacijsko simetrična:

$$\begin{aligned} P(W \leq w) &= P(U^2 + V^2 \leq w) \\ &= \iint_{u^2 + v^2 \leq w} f_{U,V}(u, v) du dv \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{w}} \frac{1}{2\pi \rho^4} e^{-\frac{1}{2\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \left(e^{-\frac{1}{2\rho^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{w}} \\ &= e^{-\frac{1}{2w}}. \end{aligned}$$

Z odvajanjem sledi

$$f_W(w) = \frac{1}{2w^2} e^{-\frac{1}{2w}}.$$

Drugi način: vemo, da sta X^2 in Y^2 neodvisni z $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ porazdelitvijo. Sledi, da je $X^2 + Y^2$ porazdeljena po $\Gamma(1, \frac{1}{2})$ zakonu, torej eksponentno s parametrom $\frac{1}{2}$. Računamo za $w > 0$

$$\begin{aligned} P(U^2 + V^2 \leq w) &= P\left(\frac{1}{X^2 + Y^2} \leq w\right) \\ &= P\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{1}{w}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2w}}. \end{aligned}$$

Odvajanje nam da

$$f_W(w) = \frac{1}{2w^2} e^{-\frac{1}{2w}}.$$

4. (20) Standardnih 52 kart dobro premešamo in jih začnemo deliti brez vračanja, dokler ne dobimo prvič enega od štirih asov. Naj bo N število kart vključno z asom, ki jih bomo razdelili, X pa število kraljev med razdeljenimi kartami

a. (10) Utemeljite, da je

$$P(X = k | N = n) = \frac{\binom{4}{k} \binom{44}{n-k-1}}{\binom{48}{n-1}}.$$

za $n = 1, 2, \dots, 49$ in $k = 0, 1, \dots, \min(4, n - 1)$. Pogojna porazdelitev X glede na dogodek $\{N = n\}$ je torej HiperGeom($n - 1, 4, 48$).

Rešitev: pogojno na $\{N = n\}$ so izbrane karte naključno izbran vzorec velikosti $n - 1$ izmed 48 kart, ki niso asi. Med temi kartami so 4 kralji.

b. (10) Izrazite $E(X)$ z $E(N)$.

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$E(X) = \sum_{n=1}^{49} E(X | N = n) P(N = n).$$

Iz prvega dela naloge sledi $E(X | N = n) = (n - 1) \cdot \frac{4}{48}$, torej je

$$E(X) = \frac{4}{48} \sum_{n=1}^{49} (n - 1) P(N = n) = \frac{E(N) - 1}{12}.$$

5. (20) Celoštevilske slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots naj imajo vrednosti v množici $\{0, 1, \dots, m\}$ ter naj velja

$$P(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = \frac{m - k}{m} \quad \text{in} \quad P(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = \frac{k}{m}$$

za vse $n \geq 0$ in vse $k = 0, 1, \dots, m$. Rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_n označimo z G_n .

- a. (10) Izpeljite zvezo med rodovnima funkcijama spremenljivk X_n in X_{n+1} . V zvezi bodo nastopali tudi odvodi rodovne funkcije G_n .

Rešitev: iz predpostavk najprej sledi

$$E(s^{X_{n+1}} | X_n = k) = s^{k+1} \cdot \frac{m - k}{m} + s^{k-1} \cdot \frac{k}{m}.$$

Obe strani enačbe pomnožimo s $P(X_n = k)$ in seštejemo po $k = 0, 1, \dots, m$. Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(s^{X_{n+1}}) &= \sum_{k=0}^m E(s^{X_{n+1}} | X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(s^{k+1} \cdot \frac{m - k}{m} + s^{k-1} \cdot \frac{k}{m} \right) P(X_n = k) \\ &= s G_n(s) - \frac{s^2}{m} G_n'(s) + \frac{1}{m} G_n'(s). \end{aligned}$$

- b. (10) Kakšna bi morala biti porazdelitev slučajne spremenljivke X_0 , da bi imele vse slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots enako porazdelitev?

Rešitev: najprej ugotovimo, da morata imeti X_0 in X_1 enako porazdelitev. Označimo rodovno funkcijo te neznanе porazdelitve z G . Veljati bi moralo

$$G(s) = s G(s) - \frac{s^2}{m} G'(s) + \frac{1}{m} G'(s),$$

kar je diferencialna enačba prvega reda. Prepišemo v

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{m}{1 + s}$$

in sledi

$$\log G(s) = m \log(1 + s) + \log c$$

za neko konstanto $c > 0$. Ker mora biti $G(1) = 1$, sledi $\log c = -m \log 2$ in posledično

$$G(s) = \left(\frac{1 + s}{2} \right)^m.$$

Dobili smo rodovno funkcijo binomske porazdelitve $\text{Bin}(m, \frac{1}{2})$. Po indukciji sledi, da imajo v tem primeru vse spremenljivke X_0, X_1, \dots enako porazdelitev.

6. (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 3$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; vse kocke so standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Označimo z W število parov *sosebnjih* kockarjev, za katere velja, da oba vržeta sosebnji števili pik. Števili iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta sosebnji, če se razlikujeta za 1 (3 in 4 sta torej sosebnji, 6 in 1 pa ne, prav tako tudi ne 3 in 3).

a. (10) Izračunajte $E(W)$ in $\text{var}(W)$.

Rešitev: pišimo $W = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, kjer je I_i indikator dogodka, da i -ti kockar in njegov desni sosed vržeta sosebnji števili pik. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18},$$

torej je:

$$E(W) = \frac{5n}{18}.$$

Za varianco računamo

$$\text{var}(W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(I_i, I_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i I_j) - E(I_i)E(I_j).$$

Za $i = j$ je $\text{cov}(I_i, I_j) = 5/18 - (5/18)^2 = 65/324$. Če sta i -ti in j -ti kockar sosebnja, je slučajna spremenljivka $I_i I_j$ je indikator dogodka, da za i -tega in j -tega kockarja velja, da s svojima desnima sosedoma vržeta sosebnje število pik. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i I_j) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12};$$

takih členov je v zgornji vsoti $2n$ (n -ti igravec ima na desni prvega za soseda). Posledično je

$$\text{cov}(I_i, I_j) = 1/12 - 25/324 = 1/162.$$

V vseh ostalih primerih pa je $\text{cov}(I_i, I_j) = 0$: dogodka, da soseda i -tega in soseda j -tega kockarja vržeta sosebnje število pik, sta neodvisna. Seštejemo in dobimo:

$$\text{var}(W) = n \cdot \frac{65}{324} + 2n \cdot \frac{1}{162} = \frac{23n}{108}.$$

b. (10) Naj bo S število kockarjev, ki vržejo šest pik. Izračunajte $\text{cov}(W, S)$.

Rešitev: pišimo $S = J_1 + J_2 + \dots + J_n$, kjer je J_j indikator dogodka, da j -ti kockar vrže šest pik. Za izračun kovariance med W in S sta spet dva standardna načina. Lahko nastavimo:

$$\text{cov}(W, S) = E(W S) - E(W) E(S)$$

in

$$E(W S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i J_j).$$

Slučajna spremenljivka $I_i J_j$ je indikator dogodka, da i -ti kockar in njegov desni sosed vržeta sosednji števili pik, j -ti kockar pa vrže šest pik. Za $i = j$ je to dogodek, da i -ti kockar vrže šest pik, njegov desni sosed pa pet pik; verjetnost tega dogodka enaka $1/36$ in takih členov je v zgodnji dvojni vsoti n . Če je j -ti kockar desni sosed i -tega kockarja, je to dogodek, da j -ti kockar vrže šest, i -ti pa pet pik; verjetnost tega dogodka je spet enaka $1/36$ in takih členov je v zgodnji dvojni vsoti spet n . Če pa j -to kockar ni niti enak i -temu niti ni njegov desni sosed, pa je verjetnost tega dogodka enaka $(1/6) \cdot (5/18) = 5/108$; takih členov je v zgornji vsoti $n^2 - 2n$. Seštejemo in dobimo:

$$E(W S) = 2n \cdot \frac{1}{36} + (n^2 - 2n) \cdot \frac{5}{108} = \frac{5n^2 - 4n}{108}.$$

Očitno je $E(J_j) = 1/6$ in posledično $E(S) = n/6$. Odštejemo in dobimo:

$$\text{var}(W) = -\frac{n}{27}.$$

Do tega pa lahko spet pridemo tudi s kovariancami – nastavimo:

$$\text{cov}(W, S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(I_i, J_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(I_i J_j) - E(I_i)E(J_j).$$

Če je $i = j$ ali pa je j -ti kockar desni sosed i -tega, je $\text{cov}(I_i, J_j) = 1/36 - 5/108 = -1/54$, sicer pa je $\text{cov}(I_i, J_j) = 0$. Seštejemo in dobimo:

$$\text{cov}(W, S) = -\frac{n}{27},$$

kar je isto kot prej.