Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

20. 1. 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V standardnem kupu 52 kart so štirje asi. Karte dobro premešamo in začnemo deliti z vrha. Naj bo X število kart, ki jih razdelimo do prvega asa, pri čemer ne štejemo prvega asa.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: indikatorji.

Rešitev:

Prvi način. *Oštevilčimo karte, ki niso asi, s* $k = 1, 2, \ldots, 48$ *in definirajmo*

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \textit{če se } k\textit{-ta karta pojavi pred prvim asom;} \\ 0\,, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = I_1 + \cdots + I_{48}$. *Zaradi simetrije bodo imeli vsi indikatorji enako pričakovano vrednost. Za izračun* $E(I_1) = P(I_1 = 1)$ *so merodajne relativne pozicije prve karte in štirih asov. Vse inducirane permutacije teh kart so enako verjetne, zato je verjetnost, da je prva karta pred vsemi asi, enaka* $\frac{1}{5}$. *Sledi*

$$E(X) = \frac{48}{5} = 9{,}6\,.$$

Drugi način. *Za* $i = 1, 2, \ldots, 48$ *definirajmo*

$$Y_i = \begin{cases} 1\,, & \textit{če med prvimi i izvlečenimi kartami še ni asa;} \\ 0\,, & \textit{sicer} \end{cases}$$

in opazimo, da je $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{48}$. *Če si predstavljamo, da v kup kart razporejamo ase na* $\binom{52}{4}$ *načinov, dobimo*

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{\binom{52-i}{4}}{\binom{52}{4}}\,,$$

torej je

$$E(X) = \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{48} \binom{52-i}{4} = \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{48} \left[\binom{53-i}{5} - \binom{52-i}{5}\right] = \frac{\binom{52}{4}}{\binom{48}{4}} = \frac{48}{5}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev:

Prvi način. *Uporabimo formulo* $\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$. *Pišimo*

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{48} \sum_{l=1}^{48} E(I_k I_l) = \sum_{k=1}^{48} \sum_{l=1}^{48} P(I_k = I_l = 1)\,.$$

Za $k = l$ *iz rešitve prejšnje točke poberemo* $P(I_k = I_l = 1) = \frac{1}{5}$. *Za* $k \neq l$ *pa podobno opazimo, da se dogodek* $\{I_k = I_l = 1\}$ *nanaša le na razporeditev asov* *ter k-te in l-te karte: to je dogodek, da sta k-ta in l-ta karta pred vsemi štirimi asi. Zamislimo si lahko, da najprej izberemo na katerih dveh izmed šestih možnih pozicij bosta ti dve karti. Vseh možnih razporeditev je $\binom{6}{2} = 15$, ugodna pa je samo ena. Zato je $P(I_k = I_l = 1) = \frac{1}{15}$ in*

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{48} P(I_k = 1) + \sum_{\substack{1 \le k,l \le 48 \\ k \ne l}} P(I_k = I_l = 1) = \frac{48}{5} + \frac{48 \cdot 47}{15} = 160\,.$$

Končno je

$$\mathrm{var}(X) = 160 - \left(\frac{48}{5}\right)^2 = \frac{1696}{25} = 67{,}84\,.$$

Drugi način. *Uporabimo formulo za varianco vsot. Zaradi simetrije so vse variance enake, prav tako pa so enake tudi vse kovariance. Prvih je 48, drugih pa $48 \cdot 47$. Iz prvega dela sledi, da je*

$$\mathrm{var}(I_1) = E(I_1^2) - \big(E(I_1)\big)^2 = P(I_1 = 1) - \big(P(I_1 = 1)\big)^2 = \frac{4}{25}\,.$$

Enako kot pri prvem načinu izračunamo $P(I_1 = I_2 = 1) = \frac{1}{15}$. Sledi

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(I_1, I_2) &= E(I_1 I_2) - E(I_1)E(I_2) = P(I_1 = I_2 = 1) - \big(P(I_k = 1)\big)^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} \\ &= \frac{2}{75}\,.\end{aligned}$$

Zaradi simetrije je $\mathrm{var}(I_k) = \frac{4}{25}$ za vse k in $\mathrm{cov}(I_k, I_l) = \frac{2}{75}$ za vse $k \ne l$. Sledi

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=1}^{48} \mathrm{var}(I_k) + \sum_{\substack{1 \le k,l \le 48 \\ k \ne l}} \mathrm{cov}(I_k, I_l) = \frac{48 \cdot 4}{25} + \frac{48 \cdot 47 \cdot 2}{75} = \frac{1696}{25}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Tretji način. *Tako kot pri drugem načinu rešitve točke a. pišimo $X = \sum_{i=1}^{48} Y_i$, kjer je Y_i indikator dogodka, da med prvimi i izvlečenimi kartami še ni asa. Podobno kot pri prvem načinu pišimo*

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{48} P(Y_i = 1) + 2 \sum_{i=1}^{47} \sum_{j=i+1}^{48} P(Y_i = Y_j = 1)\,.$$

Nadalje je

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{47}\sum_{j=i+1}^{48} P(Y_i = Y_j = 1) &= \sum_{i=1}^{47}\sum_{j=i+1}^{48} P(Y_j = 1) \\
&= \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{47}\sum_{j=i+1}^{48} \binom{52-i}{4} \\
&= \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{47}\sum_{j=i+1}^{48} \left[\binom{53-i}{5} - \binom{52-i}{5}\right] \\
&= \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{47} \binom{52-j}{5} \\
&= \frac{1}{\binom{52}{4}} \sum_{i=1}^{47} \left[\binom{53-j}{6} - \binom{52-j}{6}\right] \\
&= \frac{\binom{52}{6}}{\binom{52}{4}} \\
&= \frac{48 \cdot 47}{5 \cdot 6}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
E(X^2) = \frac{48}{5} + \frac{2 \cdot 48 \cdot 47}{30} = 160\,,
$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

2. (20) Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj imata skupno porazdelitev, podano s predpisom

$$P(X = k, Y = l) = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l! \cdot 3^{k+l+1}}$$

za $k, l \geq 0$.

a. (10) Poiščite porazdelitev vsote $Z = X + Y$.

Rešitev: Za $n = 0, 1, 2, \ldots$ izračunamo

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot 3^n} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n . \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Namig: Newton pravi

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)x^n}{n!} .$$

Rešitev: Po formuli za robno porazdelitev je

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X = k, Y = l) \\ &= \frac{1}{3^{k+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+l)}{l! \cdot 3^l} \\ &= \frac{1}{3^{k+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-k-1} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} . \end{aligned}$$

3. (20) Slučajni spremenljivki Y in W naj bosta neodvisni z $Y \sim \exp(1)$ in $W \sim \mathrm{N}(0,1)$. Naj bo

$$X = \theta Y + \sigma\sqrt{Y}W\,,$$

kjer sta $\theta > 0$ in $\sigma > 0$ dani konstanti.

a. (10) Poiščite gostoto para (Y, X).

Rešitev: Zamislimo si preslikavo

$$\Phi(y,w) = \big(y,\ \theta y + \sigma\sqrt{y}w\big)\,.$$

Na odprti množici $U = \{(y,w)\colon y > 0\}$ *je preslikava bijektivna in preslika* U *nase. Računamo*

$$\Phi^{-1}(y,x) = \left(y,\ \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)\,.$$

Predpostavke o zvezni odvedljivosti so izpolnjene in izračunamo

$$J_{\Phi^{-1}}(y,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,.$$

Sledi

$$f_{Y,X}(y,x) = f_{Y,W}\left(y,\ \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)\cdot J_{\Phi^{-1}}(y,x)\,.$$

Zaradi neodvisnosti je $f_{Y,W}(y,w) = f_Y(y)\,f_W(w)$. *Sledi, da za* $(y,x) \in U$ *velja*

$$f_{Y,X}(y,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\,\exp\left(-y - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,,$$

sicer pa je seveda $f_{Y,X}(y,x) = 0$.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \ge 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay-\frac{b}{y}}}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Rešitev: Gostoto X *izračunamo kot robno gostoto. Računamo*

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f_{Y,X}(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\,\exp\left(-y - \frac{x^2}{2\sigma^2 y} + \frac{\theta x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2 y}{2\sigma^2}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta x/\sigma^2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 y} - \frac{(\theta^2+2\sigma^2)y}{2\sigma^2}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta x/\sigma^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}}\,\exp\left(-2\sqrt{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}}\,e^{-(|x|\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}-\theta x)/\sigma^2}\,.
\end{aligned}$$

4. (20) Predpostavite, da za zaporedje celoštevilskih slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \ldots$ velja $X_0 = j \in \{0, 1, \ldots, N\}$ in

$$P(X_{n+1} = l | X_n = k) = \binom{N}{l} \left(\frac{k}{N}\right)^l \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-l}$$

za $0 \leq l \leq N$. Interpretiramo $0^0 = 1$.

a. (10) Definirajte

$$Y_n = \frac{X_n(N - X_n)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}\,.$$

Izračunajte

$$E(Y_{n+1} | X_n = k)\,.$$

Rešitev:

Prvi način. *Iz definicije vidimo, da je pogojno na $\{X_n = k\}$ porazdelitev slučajne spremenljivke X_{n+1} binomska s parametroma N in k/N. Torej je*

$$E\left(X_{n+1} | X_n = k\right) = k$$

in

$$E\left(X_{n+1}^2 | X_n = k\right) = N\left(\frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{k}{N}\right) + N^2\left(\frac{k}{N}\right)^2\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
E\big(X_{n+1}(N - X_{n+1}) | X_n = k\big) &= E\left(N X_{n+1} - X_{n+1}^2 | X_n = k\right) \\
&= Nk - N\left(\frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{k}{N}\right) - N^2\left(\frac{k}{N}\right)^2 \\
&= Nk - k + \frac{k^2}{N} - k^2 \\
&= \frac{(N-1)k(N-k)}{N}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$E\left(Y_{n+1} | X_n = k\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}} \frac{(N-1)k(N-k)}{N} = \frac{k(N-k)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}\,.$$

Drugi način. *Neposredno izračunamo*

$$
\begin{aligned}
&E\bigl(X_{n+1}(N-X_{n+1})|X_n=k\bigr)\\
&\quad=\sum_{l=0}^{N} l(N-l)\,\frac{N!}{l!\,(N-l)!}\left(\frac{k}{N}\right)^l\left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-l}\\
&\quad=\sum_{l=1}^{N-1}\frac{N!}{(l-1)!\,(N-l-1)!}\left(\frac{k}{N}\right)^l\left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-l}\\
&\quad=N(N-1)\,\frac{k}{N}\,\frac{N-k}{N}\sum_{l=1}^{N-1}\binom{N-2}{l-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{l-1}\left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-l-1}\\
&\quad=N(N-1)\,\frac{k}{N}\,\frac{N-k}{N}\sum_{r=0}^{N-2}\binom{N-2}{r}\left(\frac{k}{N}\right)^{r}\left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-r-2}\\
&\quad=\frac{(N-1)k(N-k)}{N}\,,
\end{aligned}
$$

kar se ujema z ustreznim vmesnim rezultatom iz prvega načina.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X_n)$.

Rešitev: Tako kot pri prvem načinu rešitve točke a. opazimo, da je $E(X_{n+1}|X_n=k)=k$. *Iz izreka o popolni pričakovani vrednosti sledi*

$$
E(X_{n+1})=\sum_{k=0}^{N}E(X_{n+1}|X_n=k)\,P(X_n=k)=\sum_{k=0}^{N}k\,P(X_n=k)=E(X_n)\,,
$$

torej je $E(X_n)=E(X_0)=j$. *Podobno je*

$$
\begin{aligned}
E(Y_{n+1})&=\sum_{k=0}^{N}E(Y_{n+1}|X_n=k)\,P(X_n=k)\\
&=\frac{1}{\bigl(1-\frac{1}{N}\bigr)^n}\sum_{k=0}^{N}k(N-k)\,P(X_n=k)\\
&=\frac{1}{\bigl(1-\frac{1}{N}\bigr)^n}\,E\bigl(X_n(N-X_n)\bigr)\\
&=E(Y_n)\,,
\end{aligned}
$$

zato je tudi $E(Y_{n+1})=E(Y_0)=j(N-j)$. *To pomeni, da je*

$$
E\bigl(X_n(N-X_n)\bigr)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n j(N-j)\,.
$$

Končno je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X_n)&=N\,E(X_n)-E\bigl(X_n(N-X_n)\bigr)-\bigl(E(X_n)\bigr)^2\\
&=j(N-j)\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].
\end{aligned}
$$

5. (20) Za neodvisni nenegativni slučajni spremenljivki X in Y naj za $Z = X + Y$ velja

$$E\left(s^X | Z = n\right) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^n \quad \text{in} \quad E\left(s^Y | Z = n\right) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^n$$

za $n = 0, 1, \ldots$

a. (10) Utemeljite, da velja

$$G_Z(s) = G_Z^2\left(\frac{1+s}{2}\right).$$

Rešitev: Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(s^X | Z = n\right) P(Z = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+s}{2}\right)^n P(Z = n) \\ &= E\left[\left(\frac{1+s}{2}\right)^Z\right] \\ &= G_Z\left(\frac{1+s}{2}\right) \end{aligned}$$

in podobno za $G_Y(s)$*. Zaradi neodvisnosti je* $G_Z(s) = G_X(s)\, G_Y(s)$*. Sestavimo in zahtevana enakost sledi.*

b. (10) Privzemite, da je $\lim_{s\uparrow 1} G_Z'(s) = \lambda$, kjer je $\lambda \in (0, \infty)$. Poiščite $G_Z(s)$ in s tem porazdelitev slučajne spremenljivke Z.

Namig: definirajte $F(s) = \log(G_Z(s))$ *in z indukcijo izpeljite, da velja*

$$-F(s) = 2^n \left(F(1) - F\left(1 - \frac{1-s}{2^n}\right)\right).$$

Kam konvergira desna stran, ko gre $n \to \infty$*?*

Rešitev: Iz prvega dela naloge sledi, da je $G_Z(s) > 0$ *za vse* $s \in (-1, 1)$*, tako da je funkcija* F *dobro definirana. Funkcijska enačba iz prvega dela preide v*

$$F(s) = 2F\left(\frac{1+s}{2}\right).$$

Izpeljimo zdaj zvezo iz namiga. Ker je $F(1) = 0$*, se ta zveza prevede na*

$$F(s) = 2^n F\left(1 - \frac{1-s}{2^n}\right).$$

Za $n = 1$ *je ta zveza ekvivalentna prejšnji zvezi. Za indukcijski korak z* n *na* $n + 1$ *izračunamo*

$$F(s) = 2^n F\left(1 - \frac{1-s}{2^n}\right) = 2^n \cdot 2F\left(\frac{1 + 1 - \frac{1-s}{2^n}}{2}\right) = 2^{n+1} F\left(1 - \frac{1-s}{2^{n+1}}\right).$$

Dokazali smo torej, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$-F(s) = 2^n \left(F(1) - F\left(1 - \frac{1-s}{2^n}\right)\right) .$$

Pošljimo $n \to \infty$ in po definiciji odvoda dobimo

$$-F(s) = (1-s)F'(1) = (1-s)\,\frac{G_Z'(1)}{G_Z(1)} = \lambda(1-s)\,.$$

Sledi, da je $G_Z(s) = e^{-\lambda(1-s)}$, torej je $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

6. (20) Opica tipka na pisalni stroj, ki ima 25 velikih črk. Zaporedne črke izbira neodvisno, vse črke pa imajo enako verjetnost. Nekoč v prihodnosti bo opica prvič natipkala besedo AHA. Naj bo X potrebno število črk, vključno s črkami besede AHA.

a. (10) Definirajmo simbol $\overline{X_1, X_2, \ldots, X_m}$ za črko, ki ni nobena od črk $X_1, \ldots, X_m$. Za prvih nekaj črk so možnosti $\overline{A}$, AHA, $AH\overline{A}$, $A\overline{AH}$, $AA\overline{AH}$, $AAHA$, $AAH\overline{A}$, $AAA\overline{AH}$, $AAAAHA$, $AAAH\overline{A}$, $AAAA\overline{AH}$, $AAAAAHA$, $AAAAAH\overline{A}$, ...

Konstruirajte tako particijo verjetnostnega prostora na dogodke zgornjega tipa, da se bodo dale pogojne pričakovane vrednosti slučajne spremenljivke X glede na elemente particije izraziti z brezpogojno pričakovano vrednostjo te slučajne spremenljivke. Zapišite te izražave.

Rešitev: Particijo lahko dobimo tako, da ločimo, po koliko pravilnih zaporednih črkah iz vzorca se vse skupaj spet prične na novo, seveda pa se lahko zgodi tudi, da opica dano besedo natipka. Zaradi neodvisnosti je:

- $E(X|\overline{A}) = 1 + E(X)$.
- $E(X|AAA\ldots A\overline{AH}) = k + E(X)$, *kjer je* $k \geq 2$ *število črk v pogoju.*
- $E(X|AAA\ldots AH\overline{A}) = k + E(X)$, *kjer je* $k \geq 3$ *število črk v pogoju.*
- $E(X|AAA\ldots AHA) = k$, *kjer je* $k \geq 3$ *število črk v pogoju.*

Dogodki na desnih straneh pogojnih verjetnosti res tvorijo particijo.

b. (10) Izračunajte $E(X)$. Kot znano privzemite, da za $|a| < 1$ velja

$$\sum_{k=m}^{\infty} a^k = \frac{a^m}{1-a} \quad \text{in} \quad \sum_{k=m}^{\infty} k a^k = \frac{a^m(a+m-am)}{(1-a)^2}\,.$$

Rešitev: Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$E(X) = \big(1+E(X)\big)\cdot\frac{24}{25} + \sum_{k=2}^{\infty}\big(k+E(X)\big)\cdot\frac{23}{25^k} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{k}{25^k} + \sum_{k=3}^{\infty}\big(k+E(X)\big)\cdot\frac{24}{25^k}\,.$$

Sledi enačba

$$E(X)\left[1-\frac{24}{25}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{23}{25^k}-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{24}{25^k}\right] = \frac{24}{25}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{23k}{25^k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k}{25^{k-1}}\,.$$

Z uporabo formul iz namiga dobimo

$$E(X)\left(1-\frac{24}{25}-\frac{23}{24\cdot 25}-\frac{1}{25^2}\right) = \frac{24}{25}+\frac{49\cdot 23}{24^2\cdot 25}+\frac{73}{24^2\cdot 25}\,,$$

kar po krajšem računu da $E(X) = 16.250$.