FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

17. 1. 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) V enotski krog povsem naključno postavimo zastavico.

a. (10) Izračunajte pričakovano oddaljenost zastavice od središča kroga.

Rešitev: oddaljenost zastavice od središča označimo z R. Pričakovano vrednost lahko izračunamo na vsaj tri načine.

Prvi način*: za $0 \le r \le 1$ velja $P(R \le r) = r^2$, kar pomeni, da je kumulativna porazdelitvena funkcija zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. Torej je R porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za $0 < r < 1$ enaka $f_R(r) = 2r$, drugje pa je enaka nič. Sledi*

$$E(R) = 2\int_0^1 r^2\,dr = \frac{2}{3} \doteq 0{,}667\,.$$

Drugi način*: postavimo koordinatni sistem tako, da je središče danega enotskega kroga v izhodišču, in kartezijski koordinati zastavice označimo z X in Y. Tedaj je slučajni vektor (X, Y) porazdeljen zvezno z gostoto, ki je na danem enotskem krogu enaka $1/\pi$, drugje pa je enaka nič. Nadalje je $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Pričakovana oddaljenost zastavice od izhodišča je tako enaka*

$$E(R) = \iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$$

Z vpeljavo polarnih koordinat dobimo

$$E(R) = \frac{1}{\pi}\iint_{\substack{0<r<1\\0<\varphi<2\pi}} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\iint_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Tretji način*: postavimo koordinatni sistem tako kot prej in brez škode za splošnost privzamemo, da zastavice ne postavimo na daljico $[0,1] \times \{0\}$, natančneje da jo zagotovo postavimo nekam v množico*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x^2 + y^2 < 1\} \setminus \big([0,1) \times \{0\}\,.$$

Naj bodo $h(x,y) = (r,\varphi)$ polarne koodinate točke (x,y), merjene tako, da je $0 < \varphi < 2\pi$. Preslikava h tedaj množico A bijektivno preslika na množico $B := (0,1) \times (0,\pi)$, njen inverz $h^{-1}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pa je parcialno zvezno odvedljiv z dobro znano Jacobijevo determinanto $Jh^{-1}(r,\varphi) = r$. Torej je slučajni vektor $(R,\Phi) := h(X,Y)$ (v katerem je komponenta R konsistentna z definicijo od prej) porazdeljen zvezno z gostoto, ki je za $(r,\varphi) \in B$ enaka:

$$f_{R,\Phi}(r,\varphi) = \frac{r}{\pi}\,,$$

drugje pa je enaka nič. To pa je produkt funkcije samo spremenljivke r in funkcije samo spremenljivke φ. Iz dejstva, da je integral gostote enak 1, dobimo, da je slučajna spremenljivka R porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za $0 < r < 1$ enaka $f_R(r) = 2r$, drugje pa je enaka nič. Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

b. (10) Robot Fiona, ki se sprva nahaja v središču kroga, dobi podatek, v kateri smeri je zastavica, in se premakne za razdaljo ρ v tej smeri (prej pa zastavico odstranimo, da je robot ne bi povozil). Kako naj določimo ρ, da bo pričakovana Fionina oddaljenost od mesta, kjer je bila zastavica, najmanjša? Kolikšna je ta pričakovana oddaljenost?

Rešitev: pričakovana Fionina oddaljenost od mesta, kjer je bila zastavica, je

$$E\big[|R-\rho|\big] = 2\left[\int_0^\rho (\rho - r) r\,dr + \int_\rho^1 (r-\rho) r\,dr\right] = \frac{2}{3} - \rho + \frac{2\rho^3}{3}\,,$$

kar je minimalno pri $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$*, ko je pričakovana oddaljenost enaka* $\frac{2-\sqrt{2}}{3} \doteq 0{,}1953$. *Slednjo smo torej uspeli izboljšati za faktor* $\frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \doteq 3{,}414$.

Opomba. *Optimalni* ρ *je* mediana *slučajne spremenljivke* R*, kar v zveznem primeru pomeni, da je* $P(R < \rho) = P(R \le \rho) = P(R \ge \rho) = P(R > \rho) = \frac{1}{2}$. *Če pa bi gledali minimum pričakovanega* kvadratičnega *odklona* $E\big[(X-\rho)^2\big]$*, bi bil ta dosežen pri pričakovani vrednosti.*

2. (20) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedja ničel in enic. Privzemamo, da so posamezna generirana števila neodvisna in je vsako generirano število enako 1 z verjetnostjo 1/2.

a. (5) Pri preverjanju kvalitete generatorja slučajnih števil definiramo slučajno spremenljivko Y, ki šteje, kolikokrat sta se v nizu n generiranih slučajnih ničel in enic pojavili dve enici zapovrstjo. Pri tem dopuščamo prekrivanje v smislu, da sta se v nizu 1011011110111 dve enici zapovrstjo pojavili šestkrat. Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ definiramo indikatorske slučajne spremenljivke s predpisom

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če sta na mestih } k \text{ in } k+1 \text{ enici}, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1}$, poleg tega pa se hitro prepričamo, da je

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{1}{4}\,.$$

Sledi

$$E(Y) = \frac{n-1}{4}\,.$$

b. (15) Naj bo Z število pojavljanj zaporedja 011 v nizu n generiranih slučajnih števil, pri čemer ne dopuščamo prekrivanja. Izračunajte $E(Z)$ in $\operatorname{var}(Z)$.

Rešitev: dve prekrivajoči zaporedji po treh generiranih števil ne moreta biti hkrati enaki 011, zato omejitev na neprekrivajoče nize ni pomembna. Spet definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če so na mestih } k \text{ in } k+1 \text{ in } k+2 \text{ števila 011}, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

tokrat za $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Velja $Z = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}$. Zaradi neodvisnosti je $E(I_k) = 1/8$, torej

$$E(Z) = \frac{n-2}{8}\,.$$

Varianco najlažje izračunamo s pomočjo kovarianc:

$$\operatorname{var}(Z) = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{l=1}^{n-2} \operatorname{cov}(I_k, I_l)\,.$$

Ker so I_k indikatorji, velja $\operatorname{var}(I_k) = 1/8\big(1 - 1/8\big) = 7/64$. To ustreza $n-2$ členom v zgornji dvojni vsoti. Nadalje za $|l-k| \le 2$ velja $I_l I_k = 0$, torej $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = -E(I_k)\,E(I_l) = -1/64$. Takih členov je $2(n-3+n-4) = 4n-14$. Za $|l-k| \ge 3$ pa sta I_k in I_l neodvisna, zato je njuna kovarianca enaka 0. Sledi

$$\operatorname{var}(Z) = \frac{7(n-2)}{64} - \frac{4n-14}{64} = \frac{3n}{64}\,.$$

Alternativno pa lahko uporabimo tudi izražavo $\mathrm{var}(Z) = E(Z^2) - \big(E(X)\big)^2$ *ter opazimo, da je*

$$Z^2 = \sum_{k=1}^{n-2} I_k + 2 \sum_{k=4}^{n-2} \sum_{l=1}^{k-3} I_k I_l$$

ter da sta za indikatorja I_k *in* I_l *neodvisna za poljubna* $k = 4, 5, \ldots, n-2$ *in* $l = 1, 2, \ldots, k-3$. *Sledi*

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= (n-2) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \big(1 + 2 + \cdots + (n-5)\big) \cdot \frac{1}{64} = \\ &= \frac{n-2}{8} + \frac{(n-4)(n-5)}{64} = \\ &= \frac{n^2 - n + 4}{64} \end{aligned}$$

in končno

$$\mathrm{var}(Z) = \frac{n^2 - n + 4}{64} - \frac{(n-2)^2}{64} = \frac{3n}{64}\,,$$

kar je isto kot prej.

3. (20) Gostota slučajnega vektorja (X, Y) naj bo dana z

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{2\pi y^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2y} - x}$$

za $x, y > 0$, sicer pa naj bo gostota enaka nič.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke Y. V gostoti nastopa porazdelitvena funkcija Φ standardizirano normalne porazdelitve.

   Rešitev: po formuli za robne gostote izračunamo

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \int_0^\infty x\, e^{-\frac{x^2}{2y} - x}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \int_0^\infty x\, e^{-\frac{(x+y)^2}{2y} + \frac{y}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{y^3}}\, e^{\frac{y}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{y}}^\infty \bigl(u\sqrt{y} - y\bigr)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{y}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{y^3}}\, e^{\frac{y}{2}} \left(\frac{y}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y}{2}} - y\sqrt{y}\,\bigl(1 - \Phi(\sqrt{y}\,)\bigr) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} - e^{\frac{y}{2}} \bigl(1 - \Phi(\sqrt{y}\,)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ neodvisna od (X, Y). Definirajte

$$W = \sqrt{Y} \cdot Z\,.$$

   Poiščite gostoto slučajnega vektorja (Y, W).

   Rešitev: gostota para (Y, Z) je zaradi privzetka neodvisnosti enaka

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_Y(y)\, f_Z(z) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{y}{2}} \bigl(1 - \Phi(\sqrt{y}\,)\bigr) \right) e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

   Nadalje smemo privzeti, da slučajni vektor (Y, Z) zavzame vrednosti izključno na množici $A := (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Preslikava

$$\Phi(y, z) = \bigl(y, z\sqrt{y}\bigr)$$

   to množico bijektivno preslika samo vase, njen inverz

$$\Phi^{-1}(y, w) = \left(y\,,\ \frac{w}{\sqrt{y}} \right)$$

pa je parcialno zvezno odvedljiv z

$$J_{\Phi^{-1}}(y, w) = \frac{1}{\sqrt{y}} \,.$$

Za $(y, z) \in A$ *je torej*

$$f_{Y,W}(y, w) = f_{Y,Z}\left(y\,,\ \frac{w}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \left(\frac{1}{2\pi y} - \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{\frac{y}{2}}\bigl(1 - \Phi(\sqrt{y}\,)\bigr)\right) e^{-\frac{w^2}{2y}} \,,$$

sicer pa je $f_{Y,W}(y, w) = 0$.

4. (20) Predpostavljajte, da so meti kovanca med sabo neodvisni, vsakič pa je verjetnost za grb enaka p. Naj bo W_n število potrebnih metov vključno z zadnjim, dokler prvič ne bomo videli n zaporednih grbov.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$P(W_n = k + 1 \mid W_{n-1} = k) = p$$

in za $l > k + 1$

$$P(W_n = l \mid W_{n-1} = k) = q\, P(W_n = l - k - 1)\,,$$

kjer je $q = 1 - p$.

Rešitev: če pri k-tem metu prvič dobimo $n-1$ grbov zapovrstjo, se lahko zgodi dvoje: pri naslednjem metu dobimo grb in je $W_n = k + 1$ ali pri naslednjem metu dobimo številko in se "čakanje" na n grbov zapovrstjo po $k + 1$ metih začne znova. Zgornji enačbi sta matematični zapis tega dejstva.

b. (10) Izrazite

$$E(W_n \mid W_{n-1} = k)$$

z $E(W_n)$ in izračunajte $E(W_n)$.

Rešitev: izražavo pogojne pričakovane vrednosti lahko dobimo na vsaj dva načina. Lahko se opremo na pogojne verjetnosti iz prejšnje točke, iz katerih sledi

$$\begin{aligned}
E(W_n \mid W_{n-1} = k) &= p(k+1) + \sum_{l=k+2}^{\infty} ql\, P(W_n = l - k - 1) \\
&= p(k+1) + q \sum_{m=1}^{\infty} (m + k + 1)\, P(W_n = m) \\
&= p(k+1) + q(k+1) + q\, E(W_n) \\
&= k + 1 + q\, E(W_n)
\end{aligned}$$

(v resnici je dovolj seštevati le od $l = k+1+n$ oziroma od $m = n$ naprej). Lahko pa tudi uporabimo pogojno različico formule za popolno pričakovano vrednost: pišemo lahko $E(W_n \mid W_{n-1} = k) = E^{W_{n-1}=k}(W_n)$, s čimer damo vedeti, da je to tudi pričakovana vrednost glede na pogojno verjetnostno mero
$P^{W_{n-1}=k}(A) = P(A \mid W_{n-1} = k)$. Če z G_m označimo dogodek, da v m-tem metu

pade grb, velja

$$\begin{aligned}
E(W_n \mid W_{n-1} = k) &= E^{W_{n-1}=k}(W_n) \\
&= P^{W_{n-1}=k}(G_{k+1})\, E^{W_{n-1}=k}(W_n \mid G_{k+1}) + \\
&\qquad + P^{W_{n-1}=k}(G_{k+1}^c)\, E^{W_{n-1}=k}(W_n \mid G_{k+1}^c) \\
&= P(G_{k+1} \mid W_{n-1} = k)\, E\big(W_n \mid G_{k+1} \cap \{W_{n-1} = k\}\big) + \\
&\qquad + P(G_{k+1}^c \mid W_{n-1} = k)\, E\big(W_n \mid G_{k+1}^c \cap \{W_{n-1} = k\}\big) \\
&= p(k+1) + q\big(k + 1 + E(W_n)\big) \\
&= k + 1 + q\, E(W_n)\,,
\end{aligned}$$

kar je isto kot prej.

Obe strani zadnje enačbe pomnožimo z $P(W_{n-1} = k)$ in seštejemo. Sledi

$$\begin{aligned}
E(W_n) &= \sum_{k=n-1}^{\infty} E(W_n \mid W_{n-1} = k)\, P(W_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty} \big(k + 1 + qE(W_n)\big)\, P(W_{n-1} = k) \\
&= E(W_{n-1}) + 1 + q\, E(W_n)\,,
\end{aligned}$$

Sledi

$$E(W_n) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\, E(W_{n-1})\,.$$

Če upoštevamo $E(W_1) = p^{-1}$ in razrešimo rekurzijo, sledi

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^k} = \frac{1 - p^n}{p^n q}\,.$$

5. (20) Cepetin ima dve oktaedrski kocki. Vsaka od njiju ima na svojih osnovnih ploskvah zapisane številke od 1 do 8. Cepetaj pa ima prav tako dve oktaedrski kocki, a številke na osnovnih ploskvah niso enake kot pri Cepetinu, so pa prav tako nenegativna cela števila. Če vržeta obe svoji kocki, imata oba isto porazdelitev vsote števil, ki padeta. Privzamemo, da se kocki vržeta neodvisno in da so vse osnovne ploskve enako verjetne.

a. (10) Označimo z X vsoto, ki jo dobi Cepetin. Utemeljite, da je

$$G_X(s) = \frac{1}{64}\, s^2(1+s)^2(1+s^2)^2(1+s^4)^2 \,.$$

Rešitev: slučajna spremenljivka X je vsota dveh slučajnih spremenljivk, ki imata obe rodovno funkcijo

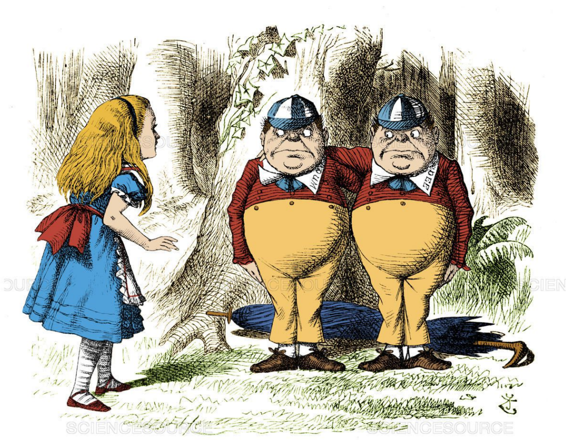
$$\frac{1}{8}\left(s + s^2 + \cdots + s^8\right) = \frac{1}{8}\, s(s+1)(s^2+1)(s^4+1)\,.$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je kvadrat zgornjega izraza, kar je zahtevana funkcija.

b. (5) Vemo, da ima ena od Cepetajevih kock zapisano število 0. Utemeljite, da na njegovi drugi kocki ni števila 0 ali 1.

Rešitev: najmanjša možna Cepetajeva vsota je enaka 2. Če ima torej prva kocka število 0, mora biti najmanjše število na drugi kocki enako 2.

c. (5) Zdaj pa vemo, da je na eni od Cepetajevih kock najmanjše zapisano število enako 0, največje pa 8. Katera števila so zapisana na Cepetajevih kockah? Števila na Cepetajevih kockah se lahko ponavljajo.



Cepetin in Cepetaj iz Alice v čudežni deželi Lewisa Carrolla

Rešitev: naj bo Y slučajno število, ki ga dobimo pri metu Cepetajeve kocke z ničlo, in naj bo Z slučajno število, ki ga dobimo pri metu druge Cepetajeve kocke. Veljati mora $G_X(s) = G_Y(s) \cdot G_Z(s)$. Rodovni funkciji na desni morata biti polinoma. To pomeni, da morata biti $G_Y(s)$ in $G_Z(s)$ sestavljena iz faktorjev polinoma $G_X(s)$. V kolobarju polinomov nad racionalnimi števili so vsi od navedenih faktorjev, ki so netrivialni, nerazcepni: za faktorje s, $1+s$ in $1+s^2$ je to očitno, za zadnjega pa to sledi iz njegovega kompleksnega in nato (do ekvivalence natančno) edinega možnega netrivialnega realnega razcepa, ki pa je iracionalen:

$$\begin{aligned}
&1+s^4\\
&\quad= \left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\\
&\quad= \left(s^2 - \sqrt{2}\,s + 1\right)\left(s^2 + \sqrt{2}\,s + 1\right).
\end{aligned}$$

Nadalje lahko privzamemo, da je vsak od faktorjev, ki sestavljajo $G_Y(s)$ in $G_Z(s)$, pri $s = 1$ enak 1, tako da so ti faktorji

$$s\,, \quad \frac{1+s}{2}\,, \quad \frac{1+s^2}{2} \quad \textit{in} \quad \frac{1+s^4}{2}\,,$$

pri čemer vsak izmed teh faktorjev skupaj nastopi natanko dvakrat. Ker morajo biti vse verjetnosti večkratniki števila $1/8$, lahko v razcepu vsake od rodovnih funkcij $G_Y(s)$ in $G_Z(s)$ nastopajo največ trije izmed faktorjev $\frac{1+s}{2}$, $\frac{1+s^2}{2}$ in $\frac{1+s^4}{2}$, upoštevajoč ponavljanje. Ker pa je teh faktorjev skupaj natanko šest, morajo v razcepu vsake od funkcij $G_Y(s)$ in $G_Z(s)$ nastopati natanko trije izmed omenjenih faktorjev, spet upoštevajoč ponavljanje.

Ker ima kocka s številom 0 največje zapisano število 8, je $G_Y(s)$ polinom stopnje 8 brez faktorja s, a z natanko tremi izmed faktorjev $\frac{1+s}{2}$, $\frac{1+s^2}{2}$ and $\frac{1+s^4}{2}$, ki se lahko tudi ponavljajo. Edina možnost je

$$G_Y(s) = \frac{(1+s^2)^2(1+s^4)}{8} = \frac{1 + 2s^2 + 2s^4 + 2s^6 + s^8}{8}\,,$$

ki nam da

$$G_Z(s) = \frac{s^2(1+s)^2(1+s^4)}{8} = \frac{s^2 + 2s^3 + s^4 + s^6 + 2s^7 + s^8}{8}\,.$$

Ena Cepetajeva kocka mora torej imeti številke $0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8$, *druga pa* $2, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8$.

6. (20) Nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ imajo porazdelitev dano s

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + \cdots + k_n + a)}{\Gamma(a) \cdot k_1! \cdots k_n! \cdot (n+1)^{a+k_1+\cdots+k_n}}$$

za $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pri tem je $a > 0$ dan. Naj bo $Y_m = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Y_n.

Rešitev: za $k \geq 0$ velja

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) \\ &= \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)\,(n+1)^{a+k}} \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!}\,. \end{aligned}$$

Členi v vsoti na desni pa so podobni verjetnostim pri multinomski porazdelitvi, ki se morajo sešteti v 1. Med drugim je tako

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= \frac{\Gamma(k+a)\, n^k}{\Gamma(a)(n+1)^{a+k} k!} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^a (a)_k}{k! \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a+k}} \\ &= \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^a \left(\frac{n}{n+1}\right)^k, \end{aligned}$$

pri čemer je $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ Pochhammerjev simbol. Dobimo Pólyevo porazdelitev, ki ima več možnih dogovorov, kako se zapiše: po enem bi bilo $Y_n \sim \mathrm{Pólya}(a, 1/n)$, po drugem pa $Y_n \sim \mathrm{Pólya}\big(a, 1/(n+1)\big)$.

b. (10) Za $m < n$ izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Y_m.

Namig: ena možnost je, da izračunate porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Rešitev: računamo

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}) \\
&\qquad = \sum_{k_n=0}^{\infty} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) \\
&\qquad = \frac{1}{(n+1)^{a+k_1+\cdots+k_{n-1}} \cdot k_1! \cdots k_{n-1}!} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k_1 + \cdots + k_n + a)}{\Gamma(a) \cdot k_n! \cdot (n+1)^{k_n}} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(k_1 + \cdots + k_{n-1} + a)}{\Gamma(a) \cdot (n+1)^{a+k_1+\cdots+k_{n-1}} \cdot k_1! \cdots k_{n-1}!} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(k_1 + \cdots + k_{n-1} + a)_{k_n}}{k_n! \cdot (n+1)^{k_n}} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(k_1 + \cdots + k_{n-1} + a)}{\Gamma(a) \cdot (n+1)^{a+k_1+\cdots+k_{n-1}} \cdot k_1! \cdots k_{n-1}!} \times \\
&\qquad\qquad \times \sum_{k_n=0}^{\infty} \binom{-k_1 - \cdots - k_{n-1} - a}{k_n} \left(-\frac{1}{n+1}\right)^{k_n} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(k_1 + \cdots + k_{n-1} + a)}{\Gamma(a) \cdot (n+1)^{a+k_1+\cdots+k_{n-1}} \cdot k_1! \cdots k_{n-1}!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-k_1-\cdots-k_{n-1}-a} \\
&\qquad = \frac{\Gamma(k_1 + \cdots + k_{n-1} + a)}{\Gamma(a) \cdot n^{a+k_1+\cdots+k_{n-1}} \cdot k_1! \cdots k_{n-1}!} \,.
\end{aligned}
$$

Porazdelitev je točno take oblike kot porazdelitev izhodiščnega vektorja, le da je n *zamenjan z* $n-1$. *Sledi* $Y_{n-1} \sim \text{Pólya}\big(a, 1/(n-1)\big)$ *oziroma* $Y_{n-1} \sim \text{Pólya}(a, 1/n)$. *Posledično je* $Y_m \sim \text{Pólya}(a, 1/m)$ *oziroma* $Y_m \sim \text{Pólya}\big(a, 1/(m+1)\big)$.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

2. kolokvij

17. 1. 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

4. (20) Iz posode, v kateri so 4 zelene in 6 rdečih kroglic, na slepo in brez vračanja izvlečemo 3 kroglice, nakar pošteno kocko vržemo tolikokrat, kolikor zelenih kroglic smo izvlekli. Naj bo X število metov, kjer je padlo največ toliko pik, kolikor rdečih kroglic je bilo izvlečenih.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: če z Z označimo število zelenih izvlečenih kroglic, je $Z \sim \mathrm{Hipergeom}(3, 4; 10)$, kar pomeni, da za $n = 0, 1, 2, 3$ velja

$$P(Z = n) = \frac{\binom{4}{n}\binom{6}{3-n}}{\binom{10}{3}},$$

torej

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{30} & \frac{15}{30} & \frac{9}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}167 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}033 \end{pmatrix}.$$

Če je $Z = n$, je bilo izvlečenih $3 - n$ rdečih kroglic, zato je $X \mid Z = n \sim \mathrm{Bin}\big(n, (3-n)/6\big)$, od koder sledi $E(X \mid Z = n) = n(3-n)/6$. Sledi:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{3} P(Z = n)\, E(X \mid Z = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{3} \frac{\binom{4}{n}\binom{6}{3-n}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{n(3-n)}{6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Slednje lahko sicer izračunamo tudi tako, da najprej izračunamo celotno brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X. Za $k = 0, 1, 2, 3$ je namreč (ob dogovoru, da je $0^0 = \binom{0}{0} = 1$)

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^{3} P(Z = n)\, P(X = k \mid Z = n) = \frac{\binom{4}{n}\binom{6}{3-n}}{\binom{10}{3}} \cdot \binom{n}{k} \frac{(3-n)^k (3+n)^{n-k}}{6^n},$$

kar nam da

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{25}{36} + \frac{1}{30} \cdot 1 = \frac{89}{120}, \\ P(X = 1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{18} + \frac{1}{30} \cdot 0 = \frac{1}{4} = \frac{30}{120}, \\ P(X = 2) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{30} \cdot 0 = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

(opazimo še, da je $P(X = 3) = 0$) in končno

$$E(X) = 1 \cdot \frac{30}{120} + 2 \cdot \frac{1}{120} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}\,,$$

kar je isto kot prej.

b. (10) Določite pogojno porazdelitev števila zelenih izvlečenih kroglic glede na dogodek $\{X = 2\}$.

Rešitev: očitno je $Z \geq X$, torej je dogodek $\{X = 2\}$ možen kvečjemu za $Z = 2$ ali $Z = 3$. Toda če je $Z = 3$, nismo izvlekli nobene rdeče kroglice, zato je v tem primeru $X = 0$. Iskana pogojna porazdelitev je torej trivialna – skoncentrirana le v 2.

V tej nalogi je treba vse rezultate navesti v obliki preprostih ulomkov ali pa izračunati na vsaj tri decimalna mesta.

6. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata skupno porazdelitev dano z verjetnostmi

$$P(X=k,Y=l)=2^{-k-1}\,; \qquad k=1,2,3,\ldots\,; \quad l=1,2,\ldots,k\,,$$

medtem ko za preostale k,l velja $P(X=k,Y=l)=0$.

a. (5) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: za $k=1,2,3,\ldots$ *je*

$$P(X=k)=\sum_{l=1}^{k}2^{-k-1}=k\,2^{-k-1}\,,$$

za ostale k *pa je* $P(X=k)=0$. *Z drugimi besedami,* $X+1\sim\mathrm{NegBin}(2,1/2)$.

b. (15) Izračunajte porazdelitev vsote $X+Y$.

Pomoč: upoštevajte identiteto $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

Rešitev: Slučajna spremenljivka $Z=X+Y$ *lahko zavzame vrednosti* $2,3,4,\ldots$ *Za* $m=1,2,3,\ldots$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}P(Z=2m)&=\sum_{l=1}^{m}P(X=2m-l\,,\;Y=l)=\\&=2^{-2m-1}\sum_{l=1}^{m}2^{l}=\\&=2^{-2m}\sum_{j=0}^{m-1}2^{j}=\\&=2^{-m}-2^{-2m}\,,\end{aligned}$$

in še

$$\begin{aligned}P(Z=2m+1)&=\sum_{l=1}^{m}P(X=2m+1-l\,,\;Y=l)=\\&=2^{-2m-2}\sum_{l=1}^{m}2^{l}=\\&=2^{2m-1}\sum_{j=0}^{m-1}2^{j}=\\&=2^{-m-1}-2^{-2m-1}\,.\end{aligned}$$