Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

2. kolokvij

17. 1. 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.					
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) Celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj imata porazdelitev

$$P(X = k, Y = l) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+l} \cdot \frac{(k)_l}{l!}$$

za $k, l \geq 0$, kjer je

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

Pochhammerjev simbol, pri čemer razumemo $(0)_0 = 0$. Kot znano privzemite, da za $|x| < 1$ in $l \geq 0$ velja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k)_l x^k = l! \cdot x(1-x)^{-l-1}\,,$$

pri čemer štejemo $0! = 1$.

a. (10) Najdite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: Po formuli za robne porazdelitve za vse $l \geq 0$ velja

$$\begin{aligned}
P(Y = l) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = l) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+l} \cdot \frac{(k)_l}{l!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l} \cdot \frac{1}{l!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \cdot (k)_l \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l} \cdot \frac{1}{l!} \cdot l! \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-l-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^{l} \\
&= \frac{2^l}{3^{l+1}}\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Za $a, b \in (0,1)$ izračunajte

$$E\left[a^X b^Y\right].$$

Rešitev: *računamo*

$$
\begin{aligned}
E\left(a^X b^Y\right) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} a^k b^l P(X=k, Y=l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^l \cdot \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} (k)_l \left(\frac{a}{4}\right)^k \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^l \frac{a}{4} \left(1-\frac{a}{4}\right)^{-l-1} \\
&= \frac{\frac{a}{4}}{1-\frac{a}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{b}{2}}{1-\frac{a}{4}}\right)^l \\
&= \frac{a}{4-a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2b}{4-a}\right)^l \\
&= \frac{a}{4-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{2b}{4-a}} \\
&= \frac{a}{4-a-2b}\,.
\end{aligned}
$$

2. (20) Naj bo Π naključno izbrana permutacija števil $\{1, 2, \ldots, n\}$. Privzamemo, da vsako permutacijo izberemo z enako verjetnostjo. Rečemo, da se pri elementu i začne naraščajoče zaporedje dolgo vsaj k, če za $i = 1$ velja

$$\Pi(1) < \Pi(2) < \cdots < \Pi(k)\,,$$

za $i = 2, 3, \ldots, n - k + 1$ pa

$$\Pi(i-1) > \Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1)\,.$$

Naj bo X_k število elementov v $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri katerih se začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k, Y_k pa število elementov, pri katerih se začne naraščajoče zaporedje dolžine natanko k.

a. (10) Izračunajte $E(X_k)$.

Rešitev: fiksirajmo k in definirajmo

$$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \textit{če se v } i \textit{ začne zaporedje dolžine vsaj } k \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X_k = I_{k1} + I_{k2} + \cdots I_{k,n-k+1}$. Spomnimo se, da se dogodek $\{I_{k1} = 1\}$ zgodi, če je $\Pi(1) < \Pi(2) < \cdots < \Pi(k)$. Vsi vrstni redi elementov $\Pi(1), \Pi(2), \ldots, \Pi(k)$ so enako verjetni, saj vsak vrstni red velja v enako mnogo, tj. $(k+1)(k+2)\cdots n = n!/k!$ permutacijah Π (predstavljamo si lahko, da nadaljnje elemente vrivamo). Zato je

$$P(I_{k1} = 1) = \frac{1}{k!}\,.$$

Podobno so enako verjetni tudi vsi možni vrstni redi elementov $\Pi(i-1), \Pi(i), \ldots,$ $\Pi(i+k-1)$, izmed $(k+1)!$ možnih vrstnih redov pa je k takih, pri katerih je $\Pi(i-1) > \Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1)$ ($\Pi(i-1)$ lahko vrinemo med $\Pi(i), \Pi(i+1), \ldots, \Pi(i+k-1)$ na k ugodnih načinov). Zato je

$$P(I_{ki} = 1) = \frac{k}{(k+1)!}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$E(X_k) = \frac{1}{k!} + (n-k)\,\frac{k}{(k+1)!} = \frac{nk - k^2 + k + 1}{(k+1)!}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(Y_k)$.

Rešitev:

Prvi način: *opazimo, da je $Y_k = X_k - X_{k+1}$, pri čemer X_{n+1} interpretiramo kot 0. Zaradi linearnosti je*

$$E(Y_k) = E(X_k) - E(X_{k+1})\,.$$

Vstavimo rezultat iz prvega dela naloge in za $k = 2, 3, \ldots, n$ *dobimo*

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \frac{nk - k^2 + k + 1}{(k+1)!} - \frac{nk - k^2 + n - k + 1}{(k+2)!} \\ &= \frac{nk^2 - k^3 + nk - n + 4k + 1}{(k+2)!}\,, \end{aligned}$$

medtem ko je

$$E(Y_n) = E(X_n) = \frac{1}{n!}\,.$$

Drugi način: *Slučajna spremenljivka* Y_n *je kar indikator dogodka, da je* $\Pi(i) = i$ *za vse* i*, torej je*

$$E(Y_n) = \frac{1}{n!}\,.$$

Za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *pa podobno kot pri prvem načinu pišemo* $Y_k = J_{k1} + J_{k2} + \cdots J_{k,n-k+1}$*, kjer je*

$$J_{ik} = \begin{cases} 1 & \textit{če se v } i \textit{ začne zaporedje dolžine natanko } k \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Ugotovimo, da se dogodek $\{J_{k1} = 1\}$ *zgodi, če je* $\Pi(1) < \Pi(2) < \cdots < \Pi(k) > \Pi(k+1)$*, dogodek* $\{J_{kn} = 1\}$ *pa, če je* $\Pi(n-k) > \Pi(n-k+1) < \Pi(n-k+2) < \cdots < \Pi(n)$*. Podobno kot pri prejšnji točki izrayunamo*

$$P(J_{k1} = 1) = P(J_{kn} = 1) = \frac{k}{(k+1)!}\,.$$

Za $i = 2, 3, \ldots, n-1\}$ *pa se dogodek* $\{J_{ki} = 1\}$ *zgodi, če je* $\Pi(i-1) > \Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1) > \Pi(i+k)$*. Izračunajmo*

$$\begin{aligned} &P(J_{k1} = 1) \\ &\quad = 1 - P\big(\Pi(i-1) < \Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1)\big) \\ &\qquad\quad - P\big(\Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1) < \Pi(i+k)\big) \\ &\qquad\quad + P\big(\Pi(i-1) < \Pi(i) < \Pi(i+1) < \cdots < \Pi(i+k-1) < \Pi(i+k)\big) \\ &\quad = 1 - 2 \cdot \frac{k}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} \\ &\quad = \frac{k^2 + k - 1}{(k+2)!}\,. \end{aligned}$$

Seštejemo in dobimo

$$E(X_k) = 2 \cdot \frac{k}{(k+1)!} + (n-k-1)\,\frac{k^2 + k - 1}{(k+2)!} = \frac{nk^2 - k^3 + nk - n + 4k + 1}{(k+2)!}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

3. (20) Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ neodvisne z $\xi_i \sim \exp(1)$ za $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Za $k = 1, 2, \ldots, n+1$ definirajte

$$X_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$ pa

$$Y_k = \frac{X_k}{X_{k+1}}\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$. Navedite natančno, kje je ta gostota različna od 0.

Rešitev: Preslikava $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) := (t_1, t_1 + t_2, \ldots, t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1})$ *množico* $(0, \infty)^{n+1}$ *bijektivno preslika na množico* $\Delta := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\,;\, 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}\}$, *njen inverz pa je enak*

$$\Phi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_{n+1} - x_n)$$

Jacobian tega inverza pa je

$$J_{\Phi^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Transformacijska formula nam torej da

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = e^{-x_1} e^{-(x_2 - x_1)} e^{-(x_3 - x_2)} \cdots e^{-(x_{n+1} - x_n)} = e^{-x_{n+1}}$$

za $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Delta$, *drugje pa je iskana gostota enaka nič.*

b. (10) Poiščite gostoto vektorja $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Rešitev: glede na to, da ima iskani vektor eno dimenzijo manj, ga razširimo za eno komponento, nakar poiščemo robno gostoto. Navedli bomo dve možnosti razširitve.

Prva možnost: *zamislimo si preslikavo* $\Psi\colon\ \Delta \times (0, \infty) \to (0, 1)^n \times (0, \infty)$, *dano s*

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, x_{n+1}\right)\,.$$

Preslikava Ψ *je prav tako bijektivna, inverzno preslikavo pa dobimo kot*

$$\Psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = \big(y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1},\ y_2 \cdots y_n y_{n+1},\ \ldots,\ y_n y_{n+1},\ y_{n+1}\big)\,.$$

V tem primeru je odvod preslikave zgornje trikoten, zato je determinanta še vedno zmnožek diagonalnih elementov. Dobimo

$$J_{\Psi^{-1}}(y_1, \ldots, y_{n+1}) = (y_2 \cdots y_{n-1} y_n)(y_3 \cdots y_{n-1} y_n) \cdots (y_{n-1} y_n) \cdot y_n = \prod_{k=1}^{n+1} y_k^{k-1}\,.$$

Sledi, da je gostota vektorja $(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ *na* $(0,1)^n \times (0,\infty)$ *enaka*

$$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_{n+1}) = e^{-y_{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} y_k^{k-1}\,,$$

drugje pa je enaka nič. Dobimo, da so $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ *neodvisne z gostotami*

$$f_{Y_k}(y) = \begin{cases} k\,y^{k-1} & ;\ 0 < y < 1 \\ 0 & ;\ \textit{sicer} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$ *in*

$$f_{Y_{n+1}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n!}\,y^n e^{-y} & ;\ y > 0 \\ 0 & ;\ \textit{sicer.} \end{cases}$$

Z drugimi besedami, $Y_k \sim \mathrm{Beta}(k,1)$ *za* $k = 1, 2, \ldots, n$ *in* $Y_{n+1} \sim \Gamma(n+1, 1)$. *(slednje mora veljati, saj je* $Y_{n+1} = X_{n+1}$*). Iskano gostoto torej dobimo kot ustrezni produkt – za* $0 < y_1, y_2, \ldots, y_n < 1$ *je enaka*

$$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y) = n! \prod_{k=1}^{n} y_k^{k-1}\,,$$

drugje pa je enaka nič.

Druga možnost: *zamislimo si preslikavo* $\Psi\colon\ \Delta \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,1)^n$, *dano s*

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(x_1,\ \frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_2}{x_3},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

Preslikava Ψ *je prav tako bijektivna, inverzno preslikavo pa dobimo kot*

$$\Psi^{-1}(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \left(y_0,\ \frac{y_0}{y_1},\ \frac{y_0}{y_1 y_2},\ \ldots,\ \frac{y_0}{y_1 y_2 \cdots y_n}\right).$$

V tem primeru je odvod preslikave spet spodnje trikoten, zato je determinanta še vedno zmnožek diagonalnih elementov. Dobimo

$$\begin{aligned} J_{\Psi^{-1}}(y_0, y_1, \ldots, y_n) &= 1 \cdot \left(-\frac{y_0}{y_1^2}\right)\left(-\frac{y_0}{y_1 y_2^2}\right) \cdots \left(-\frac{y_0}{y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n^2}\right) \\ &= (-1)^n y_0^n \prod_{k=1}^{n} y_k^{-(n-k+2)}\,. \end{aligned}$$

Sledi, da je gostota vektorja $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ *na* $(0,\infty) \times (0,1)^n$ *enaka*

$$f_{Y_0,Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_0, y_1, \ldots, y_n) = e^{-y_0/(y_1 y_2 \cdots y_n)} y_0^n \prod_{k=1}^{n} y_k^{-(n-k+2)}\,,$$

drugje pa je enaka nič. Iskano gostoto dobimo z integracijo – za $0 < y_1, y_2, \ldots y_n < 1$ *pride*

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= \left(\prod_{k=1}^{n} y_k^{-(n-k+2)}\right) \int_0^\infty y_0^n \, e^{-y_0/(y_1 y_2 \cdots y_n)} \, dy_0 \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} y_k^{-(n-k+2)}\right) \cdot n! \cdot (y_1 y_2 \cdots y_n)^{n+1} \\ &= n! \prod_{k=1}^{n} y_k^{k-1}, \end{aligned}$$

drugje pa je enaka nič. Seveda pride isto kot pri prvem načinu, pripomnimo pa naj, da komponente razširjenega vektorja $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ *tu niso neodvisne, tako da se neodvisnost slučajnih spremenljivk* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *pokaže šele na koncu.*

4. (20) Naj bodo $\lambda_i > 0$ za $i = 1, 2, \ldots, r$. Definirajte $\lambda := \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$. Slučajne spremenljivke $Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ naj imajo porazdelitev dano s

$$P\big(Y = n, Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r\big) = e^{-\lambda}\lambda^n \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i! \cdot \lambda^{k_i}}$$

za $n, k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^r k_i = n$.

a. (5) Najdite porazdelitev vektorja $(Y_1, \ldots, Y_r)$.

Rešitev: zaradi omejitev pri zalogi vrednosti je $Y = Y_1 + \cdots + Y_r$. Sledi, da je

$$P\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r\big) = P\left(Y = \textstyle\sum_{i=1}^r k_i, Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r\right).$$

Prepišemo v

$$P\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r\big) = \prod_{i=1}^{r} \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{k_i}}{k_i!}$$

za $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, r$. Spremenljivke Y_i so neodvisne z $Y_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$.

b. (5) Izračunajte pogojno porazdelitev vektorja $(Y_1, \ldots, Y_r)$ glede na dogodek $\{Y = n\}$.

Rešitev: ker je $Y = Y_1 + \cdots + Y_r$ in so Y_i neodvisne, je $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Računamo

$$P\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r \bigm| Y = n\big) = \frac{P\big(Y = n, Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r\big)}{P(Y = n)},$$

kar se poenostavi v

$$P\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_r = k_r \bigm| Y = n\big) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}$$

za $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^r k_i = n$. Pogojna porazdelitev je multinomska s parametri n in $p_i = \lambda_i/\lambda$.

c. (5) Naj bo $c_n = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j \mid Y = n)$. Utemeljite, da velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = -\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda}$$

Rešitev: dano vsoto najprej prepišemo v

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j \mid Y = n)\, P(Y = n).$$

Po definiciji je

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j \mid Y = n) = E(Y_iY_j \mid Y = n) - E(Y_i \mid Y = n)\, E(Y_j \mid Y = n).$$

Najprej izračunamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(Y_iY_j \mid Y=n)\, P(Y=n) = E(Y_iY_j) = E(Y_i)\, E(Y_j) = \lambda_i\lambda_j\,.$$

Za izračun vsote

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(Y_i \mid Y=n)\, E(Y_j \mid Y=n)\, P(Y=n)$$

pa upoštevamo, da so robne porazdelitve multinomske porazdelitve binomske, zato je $E(Y_i \mid Y=n) = n\lambda_i/\lambda$. *Sledi*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E(Y_i \mid Y=n)\, E(Y_j \mid Y=n)\, P(Y=n) &= \frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, P(Y=n)\\ &= \frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda^2}\, E(Y^2)\\ &= \frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda^2}\,(\lambda^2+\lambda)\\ &= \lambda_i\lambda_j\left(1+\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Odštejemo in dobimo željeni rezultat.

d. (5) Izračunajte c_n.

Namig: primerjajte koeficiente pri λ^n.

Rešitev: če želimo primerjati koeficiente potenčnih vrst, moramo enakost zastaviti tako, da so njihovi koeficienti konstantni, spremenljivka pa mora preteči neizrojen interval. Kovariance c_n *so natančno določene z razmerji* $p_1, p_2, \dots, p_r$. *Privzemimo torej, da so ta razmerja konstantna. Količina* λ *je lahko pri tem še vedno poljubno število iz intervala* $(0, \infty)$. *To količino torej vzemimo kot spremenljivko. Vse izraze moramo torej prikazati kot funkcije spremenljivke* λ, *seveda pa lahko v njih nastopajo tudi konstante* $p_1, p_2, \dots, p_r$. *Tako enakost iz prejšnje točke prepišemo v obliki*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n\lambda^n}{n!} = -\lambda e^{\lambda} p_ip_j = -p_ip_j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = -p_ip_j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\,.$$

Razberemo $c_n = -np_ip_j$.

5. (20) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $I_k \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Vzemimo $m > 0$. Naj bo N slučajna spremenljivka, ki je neodvisna od $I_1, I_2, \ldots$ in ima porazdelitev, podano s formulo

$$P(N = k) = \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$

a. (15) Poiščite porazdelitev spremenljivke $X = I_1 + \cdots + I_N$. Kot znano lahko privzamete, da po Newtonu za $m > 0$ in $|x| < 1$ velja

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k \,.$$

Rešitev: najlaže bo z rodovnimi funkcijami. Vemo, da bo $G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s))$. Velja

$$G_{I_1}(s) = 1 - \theta + \theta s \,.$$

Potrebujemo še $G_N(s)$. Računamo

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k = \frac{p^m}{\big(1-(1-p)s\big)^m} \,.$$

Sledi

$$G_X(s) = \frac{p^m}{\big(1-(1-p)(1-\theta+\theta s)\big)^m} \,.$$

Za rekonstrukcijo verjetnosti posameznih vrednosti imamo vsaj dve možnosti.

Prvi način. *Z odvajanjem:*

$$G_X^{(k)}(s) = m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)\, \frac{p^m\big((1-p)\theta\big)^k}{\big(1-(1-p)(1-\theta+\theta s)\big)^{m+k}}$$

dobimo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} \\ &= \binom{m+k-1}{k} \frac{p^m\big((1-p)\theta\big)^k}{\big(1-(1-p)(1-\theta)\big)^{m+k}} \\ &= \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{p}{p+\theta-p\theta}\right)^m \left(\frac{(1-p)\theta}{p+\theta-p\theta}\right)^k \,. \end{aligned}$$

Dobljena porazdelitev je torej enake oblike kot porazdelitev slučajne spremenljivke N, le da p zamenjamo s $\frac{p}{\theta+p-\theta p}$.

Drugi način. *Funkcijo G_X razvijemo v potenčno vrsto. Za ta namen opazimo, da je osnova potence v imenovalcu prav tako linearna funkcija spremenljivke s.*

To pomeni, da lahko spet uporabimo Newtonovo formulo, za to pa je ugodno izpostaviti svobodni člen. Pišimo torej

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{p^m}{\big(\theta + p - \theta p - (\theta - \theta p)s\big)^m} \\ &= \frac{\left(\frac{p}{\theta+p-\theta p}\right)^m}{\left(1 - \frac{\theta-\theta p}{\theta+p-\theta p}\, s\right)^m} \,. \end{aligned}$$

Če zapišemo še

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{p^m}{\big(\theta + p - \theta p - (\theta - \theta p)s\big)^m} \\ &= \frac{\left(\frac{p}{\theta+p-\theta p}\right)^m}{\left(1 - \left(1 - \frac{p}{\theta+p-\theta p}\right) s\right)^m} \,, \end{aligned}$$

opazimo, da je dobljena rodovna funkcija enake oblike kot rodovna funkcija slučajne spremenljivke N, le da p zamenjamo s $\frac{p}{\theta+p-\theta p}$. Sledi, da za $k = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$P(X = k) = \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{p}{\theta + p - \theta p}\right)^m \left(\frac{\theta - \theta p}{\theta + p - \theta p}\right)^k \,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

b. (5) Naj bosta N_1 in N_2 neodvisni in enako porazdeljeni ter naj ima $N_1 + N_2$ enako porazdelitev kot N. Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke N_1.

Rešitev: Iz lastnosti rodovnih funkcij dobimo

$$G_{N_1}(s)^2 = G_N(s)$$

ali

$$G_{N_1}(s) = p^{m/2}\big(1 - (1-p)s\big)^{-m/2} \,.$$

Tudi tokrat dobimo porazdelitev iste vrste, le da namesto m dobimo $m/2$, se pravi

$$P(N = k) = \binom{m/2 + k - 1}{k} p^{m/2} (1-p)^k \,.$$

6. (20) Dan je kup n kart, ki so oštevilčene s številkami od 1 do n. Sprva so karte zložene po vrsti, tako da je na vrhu karta 1, na dnu pa karta n. Kup začnemo po korakih mešati. Na k-tem koraku ($k = 1, 2, 3, \ldots$) najprej vrhnjih V_k kart v nespremenjenem vrstnem redu prestavimo na mizo, nato pa nanje položimo preostale karte v obratnem vrstnem redu. Po prvem koraku imajo tako karte z vrha proti dnu številke:

$$n,\ n-1,\ \ldots,\ V_1+1,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ V_1\,.$$

Pri tem so $V_1, V_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$. Če je torej $V_k = n$, na k-tem koraku ne naredimo ničesar.

Označimo z X_k številko karte na vrhu, z Y_k pa številko karte na dnu kupa po k-tem koraku; definiramo tudi $X_0 = 1$ in $Y_0 = n$.

a. (5) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$

Rešitev: Slučajna spremenljivka Y_1 je kar enaka V_1, torej je porazdeljena enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$. Še splošneje je $P(Y_k = j \mid Y_{k-1} = i) = \frac{1}{n}$ za vse $i, j = 1, 2, \ldots, n$ in vse $k = 1, 2, 3, \ldots$ Sledi, da so vse slučajne spremenljivke $Y_1, Y_2, \ldots$ porazdeljene enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b. (10) Za $j = 1, 2, \ldots, n$ in $k = 0, 1, 2, \ldots$ naj bo $p_{jk} := P(X_k = j)$. Za $k \ge 2$ izrazite p_{jk} s $p_{j,k-1}$.

Namig: pogojujte na V_k.

Rešitev: Če je $V_k = 1, 2, \ldots, n-1$, je $X_k = Y_{k-1}$, če je $V_k = n$, pa je $X_k = X_{k-1}$. Ob upoštevanju neodvisnosti in rezultata iz prejšnje točke dobimo

$$\begin{aligned}
p_{jk} &= \sum_{i=1}^{n} P(V_k = i)\, P(X_k = j \mid V_k = i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} P(Y_{k-1} = j \mid V_k = i) + \frac{1}{n}\, P(X_{k-1} = j \mid V_k = n) \\
&= \frac{n-1}{n}\, P(Y_{k-1} = j) + \frac{1}{n}\, P(X_{k-1} = j) \\
&= \frac{n-1}{n^2} + \frac{p_{j,k-1}}{n}\,.
\end{aligned}$$

c. (5) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$

Namig: glejte $p_{jk} - \frac{1}{n}$ in pazite na to, da zveza iz prejšnje točke velja samo za $k \ge 2$.

Rešitev: Če definiramo $\delta_{jk} := p_{jk} - \frac{1}{n}$, nam rezultat prejšnje točke za $k \ge 2$ da

$$\delta_{jk} = \frac{\delta_{j,k-1}}{n}\,,$$

torej za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$\delta_{jk} = \frac{\delta_{j1}}{n^{k-1}}\,.$$

Iz

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{n} \quad in \quad P(X_1 = n) = \frac{n-1}{n}$$

dobimo $\delta_{11} = 0$, $\delta_{n1} = \frac{n-2}{n}$ *in* $\delta_{j1} = -\frac{1}{n}$ *za* $j = 2, 3, \ldots, n-1$. *Za* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *je torej*

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n}\,, \qquad P(X_k = n) = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n^k}$$

in

$$P(X_k = j) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^k} \quad za\ j = 2, 3, \ldots, n-1\,.$$