IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

2. KOLOKVIJ

13. 1. 2023

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.				•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Naj bo $\lambda > 0$. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\exp(\lambda)$, tj. zvezno z gostoto

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo $Y := \operatorname{ctg} X$.

a. (15) Izračunajte kumulativno porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: privzamemo lahko, da X zavzame vrednosti izključno na uniji $\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigl(k\pi, (k+1)\pi\bigr)$. Za poljuben $y \in \mathbb{R}$ je potem $Y \le y$ natanko tedaj, ko obstaja tak $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, da je $\operatorname{arc\,ctg} y + k\pi \le X < (k+1)\pi$. Torej je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\bigl(\operatorname{arc\,ctg} y + k\pi \le X < (k+1)\pi\bigr) = \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\operatorname{arc\,ctg} y + k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi\lambda}\bigl(e^{-\lambda \operatorname{arc\,ctg} y} - e^{-\pi\lambda}\bigr) = \\ &= \frac{e^{-\lambda \operatorname{arc\,ctg} y} - e^{-\pi\lambda}}{1 - e^{-\pi\lambda}}\,. \end{aligned}$$

b. (5) Utemeljite, da je Y porazdeljena zvezno, in določite njeno porazdelitveno gostoto.

Rešitev: porazdelitev je zvezna, ker je kumulativna porazdelitvena funkcija zvezno odvedljiva, iskana gostota pa je njen odvod:

$$p_Y(y) = \frac{\lambda\, e^{-\lambda \operatorname{arc\,ctg} y}}{\bigl(1 - e^{-\pi\lambda}\bigr)(1 + y^2)}\,.$$

2. (20) Naj bo $\beta > 0$. Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta neodvisni in enako porazdeljeni ter naj za $k = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$P(X = k) = \frac{\binom{2k}{k}\beta^k}{4^k(1+\beta)^{k+\frac{1}{2}}}\,.$$

a. (10) Izračunajte porazdelitev vsote $X + Y$.

Namig: prepričajte se, da je

$$\binom{2k}{k} = \frac{4^k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}\,,$$

kjer je $(a)_k$ *Pochhammerjev simbol:*

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)\,, \quad (a)_0 = 1\,.$$

Kot znano potem privzemite, da je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_k\,(b)_{n-k} = (a+b)_n\ .$$

Rešitev: najprej za $k = 1, 2, \ldots$ *izračunamo*

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k} = \frac{(2k)!}{2^k\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} = \frac{(2k)!}{4^k\cdot k!} = \frac{k!}{4^k}\binom{2k}{k}\,.$$

Obrnemo in dobimo enakost iz namiga. Ob dogovoru, da je $\binom{0}{0} = 1$, *le-ta velja tudi za* $k = 0$.

Zdaj pa za $n = 0, 1, 2, \ldots$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k)\\
&= \frac{\beta^n}{4^n(1+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{4^n(1+\beta)^{n+1}}\,4^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{n!\,(1+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}\\
&= \frac{\beta^n}{n!\,(1+\beta)^{n+1}}\,(1)_n\\
&= \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Še drugače, velja $X + Y + 1 \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: vemo, da je varianca slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$*, enaka* $\frac{1-p}{p^2}$*. Vstavimo* $p = \frac{1}{1+\beta}$ *in dobimo*

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X+Y+1) = \beta(1+\beta)\,.$$

Ker je $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y)$ *in je zaradi neodvisnosti*

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)\,,$$

je $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{2}\beta(1+\beta)$.

3. (20) Slučajne spremenljivke Z, S in X naj bodo neodvisne. Naj bo $Z \sim \exp(1/2)$, S naj ima gostoto

$$f_S(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s^3}}\, e^{-\frac{1}{4s}}$$

za $s > 0$ in 0 sicer ter $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay-\frac{b}{y}}}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Definirajte

$$U = \frac{\sqrt{Z}}{S} X\,.$$

a. (15) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja (S, U).

Rešitev: definiramo preslikavo Φ s predpisom

$$\Phi(z,s,x) = \left(z, s, x\sqrt{z}/s\right)\,.$$

Ta preslikava množico $(0,\infty)^2 \times (-\infty,\infty)$ bijektivno preslika samo vase in je s svojim inverzom vred parcialno zvezno odvedljiva. Inverz

$$\Phi^{-1}(z,s,u) = \left(z, s, su/\sqrt{z}\,\right)$$

ima Jacobijevo determinanto

$$J_{\Phi^{-1}}(z,s,u) = \frac{s}{\sqrt{z}}\,.$$

Gostota slučajnega vektorja (Z,S,U) je torej za $s, z > 0$ in $u \in \mathbb{R}$ enaka

$$f_{Z,S,U}(z,s,u) = \frac{s}{\sqrt{z}}\, f_Z(z)\, f_S(s)\, f_X\!\left(\frac{su}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2s}}\, e^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{4s}-\frac{s^2u^2}{2z}}\,,$$

sicer pa je enaka nič.

Gostoto slučajnega vektorja (S,U) dobimo kot robno gostoto. Z uporabo integrala, navedenega na začetku, za $s > 0$ in $u \in \mathbb{R}$ izračunamo

$$\begin{aligned}
f_{S,U}(s,u) &= \int_0^\infty f_{Z,S,U}(z,s,u)\, dz \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{2s}}\, e^{-\frac{1}{4s}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}-\frac{s^2u^2}{2z}}\, dz \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{1}{4s}-s|u|}\,,
\end{aligned}$$

sicer pa je gostota enaka nič.

b. (5) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke U.

Rešitev: z upoštevanjem prvega dela naloge dobimo

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^\infty f_{S,U}(s,u)\,ds \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\,e^{-\frac{1}{4s}}\,e^{-s|u|}\,ds \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|u|}}\,e^{-\sqrt{|u|}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{|u|}}\,e^{-\sqrt{|u|}}\,.
\end{aligned}$$

Dobljena gostota je definirana za vse $u \in \mathbb{R}$ *razen za* $u = 0$*, a slednje si lahko privoščimo.*

4. (20) Zaporedoma mečemo pošteno kocko in privzamemo, da so meti neodvisni. Rečemo, da na k-tem koraku dobimo *sosledje*, če v metih $k-5, k-4, \ldots, k$ dobimo števila pik $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Naj bo X število metov, dokler prvič ne dobimo sosledja, vključno s sosledjem samim.

a. (5) Naj bo $B = \{\text{prvi met je } 1\}$. Poiščite zvezo med $E(X)$ in $E(X \mid B)$.

Rešitev:

Prvi način: *po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$E(X) = E(X \mid B)\, P(B) + E(X \mid B^c)\, P(B^c)\,.$$

Če na prvem metu ne pade ena pika, zaradi neodvisnosti ponovno začnemo čakati na sosledje, zato je $E(X \mid B^c) = 1 + E(X)$. *Če to uporabimo v zgornji formuli, sledi*

$$E(X) = \tfrac{1}{6}\, E(X \mid B) + \tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{6}\, E(X)$$

in po ureditvi

$$E(X) = E(X \mid B) + 5\,.$$

Drugi način: *če je Y število metov, preden prvič vržemo eno piko, za vsak* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *velja* $E(X \mid Y = k) = k + E(X \mid B)$. *Po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(X \mid Y = k)\, P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \big(k + E(X \mid B)\big)\, P(Y = k) \\ &= E(Y) + E(X \mid B)\,. \end{aligned}$$

Ker je $Y + 1 \sim \mathrm{Geom}(1/6)$, *je* $E(Y) = 6 - 1 = 5$ *in dobimo isto kot pri prvem načinu.*

b. (5) Za $j = 1, 2, \ldots, 6$ naj bo $C_j = \{X > 6\} \cap \{\text{šesti met je } j\}$. Izračunajte $P(C_j)$.

Rešitev: za $j = 1, 2, \ldots, 5$ *je* $P(C_j) = \frac{1}{6}$. *Dogodek* C_6 *se zgodi, če na šestem metu dobimo šest pik, na prvih petih pa ne dobimo po vrsti* $1, 2, 3, 4, 5$ *pik. Zaradi neodvisnosti sledi*

$$P(C_6) = \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^5\right) \cdot \frac{1}{6}\,.$$

c. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: naj bo B_j *dogodek, da v prvih* j *metih dobimo zaporedje* $1, 2, \ldots, j$: *velja torej* $B_1 = B$. *Nadalje naj bo* $B_{j,k}$ *dogodek, da v prvih* j *metih dobimo zaporedje* $1, 2, \ldots, j$, *v* $(j+1)$*-tem metu pa dobimo* k. *Tedaj je:*

$$\begin{aligned} E(X \mid B_{j,1}) &= j + E(X \mid B) = j - 5 + E(X)\,, \\ E(X \mid B_{j,j+1}) &= E(X \mid B_{j+1})\,, \end{aligned}$$

za $k \in \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{1, j+1\}$ *pa je:*

$$E(X \mid B_{j,k}) = j + 1 + E(X)\,.$$

Lotimo se zdaj računanja pogojnih pričakovanih vrednosti $E(X \mid B_j)$*. Očitno je* $E(X \mid B_6) = 6$*, za* $j = 1,2,3,4,5$ *pa izhajamo iz:*

$$E\big[X\mathbf{1}_{B_j}\big] = \sum_{k=1}^{6} E\big[X\mathbf{1}_{B_{j,k}}\big]\,,$$

torej

$$E(X \mid B_j)\,P(B_j) = \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,P(B_{j,k})\,,$$

kar nam da

$$\begin{aligned}
E(X \mid B_j) &= \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,\frac{P(B_{j,k})}{P(B_j)} \\
&= \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,P(B_{j,k} \mid B_j) \\
&= \tfrac{1}{6}\big(j - 5 + E(X)\big) + \tfrac{1}{6}\,E(X \mid B_{j+1}) + \tfrac{4}{6}\big(j + 1 + E(X)\big) \\
&= \tfrac{5}{6}j - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6}\,E(X) + \tfrac{1}{6}\,E(X \mid B_{j+1})\,.
\end{aligned}$$

Dobili smo rekurzivno zvezo med temi pogojnimi verjetnostmi. Induktivno lahko dokažemo, da je

$$E(X \mid B_j) = j + \big(1 - 6^{j-6}\big)E(X)\,.$$

Za $j = 1$ *je torej*

$$E(X \mid B_1) = 1 + \big(1 - 6^{-5}\big)E(X)\,,$$

obenem pa tudi

$$E(X \mid B_1) = E(X \mid B) = E(X) - 5\,.$$

Izenačimo, razrešimo in dobimo $E(X) = 6^6$*.*

5. (20) V kupu $a+b$ kart je a belih in b rdečih. Karte premešamo, tako da je vsaka permutacija enako verjetna, nakar jih z vrha polagamo na mizo. Naj bo X število belih kart pred prvo rdečo, Y pa število belih kart za zadnjo rdečo.

a. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Rešitev: bele karte oštevilčimo od 1 *do* a. *Definiramo*

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta pred prvo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

in

$$J_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta za zadnjo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

Velja $X = \sum_{k=1}^{a} I_k$ *in* $Y = \sum_{l=1}^{a} J_l$.

Če gledamo samo prvo belo karto in rdeče karte, so te naključno permutirane. Verjetnost, da je prva bela karta pred vsemi rdečimi, je tako

$$P(I_1 = 1) = \frac{1}{b+1}\,.$$

Zaradi simetrije velja isto za J_1. *Nadalje je*

$$P(I_1 = 1, J_1 = 1) = 0 \quad \text{in} \quad P(I_1 = 1, J_2 = 1) = \frac{1}{(b+1)(b+2)}\,.$$

Nadaljujemo lahko na vsaj dva načina.

Prvi način: *izračunamo*

$$E(X) = E(Y) = \frac{a}{b+1} \quad \text{in} \quad E(XY) = \frac{a(a-1)}{(b+1)(b+2)}\,,$$

in sledi

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\ &= \frac{a(a-1)}{(b+1)(b+2)} - \frac{a^2}{(b+1)^2} \\ &= -\frac{a(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}\,. \end{aligned}$$

Drugi način: *upoštevamo bilinearnost kovariance in simetrijo. Tako velja*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{k,l=1}^{a} \operatorname{cov}(I_k, J_l)\,.$$

Zaradi simetrije so za $k \neq l$ *vse kovariance enake, prav tako so enake vse kovariance, ko je* $k = l$. *Sledi*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = a\operatorname{cov}(I_1,J_1) + a(a-1)\operatorname{cov}(I_1,J_2)\,.$$

Ker je $I_1 J_1 = 0$*, je*

$$\operatorname{cov}(I_1, J_1) = -\frac{1}{(1+b)^2}\,.$$

Nadalje je

$$\operatorname{cov}(I_1, J_2) = \frac{1}{(b+1)(b+2)} - \frac{1}{(b+1)^2} = -\frac{1}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

Dobimo

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{a}{(b+1)^2} - \frac{a(a-1)}{(b+1)^2(b+2)} = -\frac{a(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}\,,$$

kar je isto kot prej.

b. (10) Privzemite, da je $b \geq 2$ in je Z število belih kart med prvo in drugo rdečo karto. Za $l \leq a$ izračunajte

$$\operatorname{cov}(X, Y \mid Z = l)\,.$$

Namig: pomislite na pogojno porazdelitev, preden greste računat.

Rešitev: mislimo si lahko, da iz kupa odstranimo bele karte med prvo in drugo rdečo karto, z drugo rdečo karto vred. Ostane $a - l$ *belih in* $b - 1$ *rdečih kart in vsaka izvirna razporeditev, pri kateri je* $Z = l$*, ustreza natanko eni razporeditvi* $a - l$ *belih in* $b - 1$ *rdečih kart. Torej morajo biti tudi te razporeditve naključno permutirane. Iz prvega dela naloge tako razberemo*

$$\operatorname{cov}(X, Y \mid Z = l) = -\frac{(a-l)(a+b-l)}{b^2(b+1)}\,.$$

6. (20) Pošteno kocko mečemo, dokler ne dobimo vseh možnih izidov. Za $i = 1, 2, \ldots, 6$ naj bo X_i število pojavitev izida i v vseh metih, vključno z zadnjim.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$. Posebej navedite, katere vrednosti lahko zavzame.

Rešitev: možne vrednosti slučajnega vektorja so šesterice $(k_1, \ldots, k_6)$, za katere je $k_i \geq 1$ in je vsaj en k_i enak 1. Naj bo $(k_1, \ldots, k_6)$ taka šesterica. Označimo $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_6$ in naj bo r število komponent, enakih 1. Dogodek $\{X_1 = k_1, \ldots, X_6 = k_6\}$ se lahko zgodi tako, da je eden od izidov i, za katerega je $k_i = 1$, na zadnjem mestu, ostalih pet izidov pa je razmeščenih med prvimi $n-1$ izidi. Različnih razmestitev je

$$\frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_6!},$$

ker štejemo permutacije s ponavljanjem petih elementov in tista enka, ki bi jo morali načeloma izpustiti, pomeni deljenje z 1. Sledi

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_6 = k_6) = r \cdot \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_6!} \left(\frac{1}{6}\right)^n .$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$, pri čemer spet navedite, katere vrednosti lahko zavzame.

Rešitev: naj bo $(l_1, l_2, \ldots, l_5)$ peterica celih števil večjih ali enakih 1. Vse take peterice so možne vrednosti. Označimo $m = k_1 + \cdots + k_5$ in naj bo s število enk med komponentami $(l_1, \ldots, l_5)$. Ločimo dva primera:

(1) Če je $s = 0$, je

$$P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5) = P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5, X_6 = 1),$$

torej

$$P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5) = \frac{m!}{l_1! \cdots l_5!} \left(\frac{1}{6}\right)^{m+1} .$$

(2) Če je $s > 0$, pa je

$$\begin{aligned} &P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5) \\ &= P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5, X_6 = 1) + \sum_{j=2}^{\infty} P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5, X_6 = j) . \end{aligned}$$

Prvi člen je

$$P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5, X_6 = 1) = (s+1) \cdot \frac{m!}{l_1! \cdots l_5!} \left(\frac{1}{6}\right)^{m+1} ,$$

druga vsota pa je enaka

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{\infty} & s \cdot \frac{(m+j-1)!}{l_1! \cdots l_5! \cdot j!} \left(\frac{1}{6}\right)^{m+j} \\
& = s \cdot \frac{(m-1)!}{l_1! \cdots l_5!} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+j-1)}{j!} \left(\frac{1}{6}\right)^{m+j} \\
& = s \left(\frac{1}{6}\right)^m \frac{(m-1)!}{l_1! \cdots l_5!} \sum_{j=2}^{\infty} \binom{-m}{j} \left(-\frac{1}{6}\right)^j \\
& = s \left(\frac{1}{6}\right)^m \frac{(m-1)!}{l_1! \cdots l_5!} \left[\left(\frac{6}{5}\right)^m - 1 - \frac{m}{6}\right].
\end{aligned}
$$

Seštejemo in poenostavimo v

$$
P(X_1 = l_1, \ldots, X_5 = l_5) = \frac{(m-1)!}{l_1! \cdots l_5!} \left[\frac{s}{5^m} - \frac{s}{6^m} + \frac{m}{6^{m+1}}\right].
$$

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

PEDAGOŠKA MATEMATIKA

VERJETNOST

2. KOLOKVIJ

13. 1. 2023

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

4. (20) Za slučajni spremenljivki X in Y z vrednostmi v množici $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ naj velja

$$\begin{aligned} P(Y = k+1 \mid X = k) &= \frac{k(m-k)}{m^2} \\ P(Y = k \mid X = k) &= \frac{k^2 + (m-k)^2}{m^2} \\ P(Y = k-1 \mid X = k) &= \frac{k(m-k)}{m^2} \end{aligned}$$

za $k = 0, 1, \ldots, m$.

a. (10) Izrazite $E(Y)$ z $E(X)$.

Rešitev: Po definiciji je

$$E(Y \mid X = k) = (k+1) \cdot \frac{k(m-k)}{m^2} + k \cdot \frac{k^2 + (m-k)^2)}{m^2} + (k-1) \cdot \frac{k(m-k)}{m^2}\,.$$

Z nekaj računanja sledi, da je $E(Y \mid X = k) = k$. Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{m} E(Y \mid X = k)\, P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} k\, P(X = k) \\ &= E(X)\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izrazite $\mathrm{var}(Y)$ z varianco $\mathrm{var}(X)$ in pričakovano vrednostjo $E(X)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} E(Y^2 \mid X = k) &= (k+1)^2\, \frac{k(m-k)}{m^2} + k^2\, \frac{k^2 + (m-k)^2)}{m^2} + (k-1)^2\, \frac{k(m-k)}{m^2} \\ &= \frac{2mk + k^2(m^2-2)}{m^2}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{m} E(Y^2 \mid X = k) P(X = k) = \frac{2}{m} E(X) + \left(1 - \frac{2}{m^2}\right) E(X^2)\,.$$

Ker je $E(X^2) = \mathrm{var}(X) + E(X)^2$, dobimo

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{2}{m}\, E(X) + \left(1 - \frac{2}{m^2}\right) (\mathrm{var}(X) + E(X)^2) - E(X)^2 = \\ &= \frac{2}{m}\, E(X) + \left(1 - \frac{2}{m^2}\right) \mathrm{var}(X) - \frac{2}{m^2}\, E(X^2)\,. \end{aligned}$$