FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

1. kolokvij

6. 12. 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) V dobro premešanem kupu je 5 rdečih in 5 črnih kart. Kvartopirec Lojze izvleče vrhnje tri karte.

a. (10) Izračunajte porazdelitev števila rdečih kart med izvlečenimi.

Rešitev: ugodno je ločiti vse karte in gledati, katere tri so bile izvlečene. Če je R število rdečih kart med izvlečenimi, za $k = 0, 1, 2, 3$ velja

$$P(R = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}} \,.$$

Izračunamo binomske simbole in dobimo:

$$P(R = 0) = P(R = 3) = \frac{1}{12} \doteq 0{,}0833 \,, \qquad P(R = 1) = P(R = 2) = \frac{5}{12} \doteq 0{,}4167 \,.$$

b. (10) Lojze dobi nalogo, da na podlagi treh kart, ki jih je izvlekel, napove barvo četrte. Seveda napove tisto barvo, ki je med izvlečenimi manj zastopana. Kolikšna je verjetnost, da bo Lojzetova napoved pravilna?

Rešitev: označimo z L dogodek, da Lojze pravilno napove barvo četrte karte. Pri $R = k$ v kupu ostane še $5 - k$ rdečih in $2 + k$ črnih kart. Če je $k \in \{0, 1\}$, bo Lojze napovedal rdečo barvo, torej bo $P(L \mid R = k) = \frac{5-k}{7}$, pri $k \in \{2, 3\}$ pa bo Lojze napovedal črno karto, torej bo $P(L \mid R = k) = \frac{2+k}{7}$. Po izreku o popolni verjetnosti je želena verjetnost enaka

$$P(L) = \sum_{k=0}^{3} P(R = k)\, P(L \mid R = k) = 2\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{25}{42} \doteq 0{,}595 \,.$$

V tej nalogi je treba vse rezultate navesti v obliki preprostih ulomkov ali pa numerično na najmanj tri decimalke natančno.

2. (20) V igri *Black Jack* je poleg delilca kart udeleženo še sedem igralcev. Delilec združi šest kupov 52 standardnih kart v enega, ga dobro premeša, dodeli sebi eno karto, ostalim igralcem pa vsakemu po dve.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo imel delilec sedmico, vsaj eden od ostalih igralcev pa za obe svoji karti sedmici v istem simbolu kot delilec, recimo da ima delilec srčevo sedmico in še vsaj eden od igralcev dve srčevi sedmici.

Rešitev: če za $k = 1, 2, \ldots, 7$ označimo z A_k dogodek, da imata delilec in igralec k same srčeve sedmice, je iskani dogodek, da imata delilec in vsaj en igralec sedmice v srcu, natančno unija $\cup_{k=1}^{7} A_k$. Njeno verjetnost izračunamo po formuli za vključitve in izključitve.

Ker so tri karte, ki jih imata delilec in igralec k, naključno izbrane izmed vseh 312 kart, je

$$P(A_k) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{312}{3}} = \frac{\binom{309}{3}}{\binom{312}{6}}\,.$$

Nadalje za $k \neq l$ velja

$$P(A_k \cap A_l) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{312}{5}} = \frac{307}{\binom{312}{6}}\,.$$

Verjetnost preseka treh ali več dogodkov izmed $A_1, \ldots, A_7$ pa je enaka 0. Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije je

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{7} A_k\right) = 7 \cdot P(A_1) - 21 \cdot P(A_1 \cap A_2)\,.$$

Simboli so štirje, tako da je iskana verjetnost enaka

$$28 \cdot P(A_1) - 84 \cdot P(A_1 \cap A_2)\,.$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da bosta imela delilec in vsaj en igralec izključno sedmice, ne glede na simbol?

Rešitev: za $k = 1, 2, \ldots, 7$ naj bo B_k dogodek, da imata delilec in igralec k sedmice. Tedaj za $l = 1, 2, \ldots, 7$ velja

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_l) = \frac{\binom{24}{2l+1}}{\binom{312}{2l+1}} = \frac{\binom{311-2l}{23-2l}}{\binom{312}{24}}\,.$$

Dogodek, katerega verjetnost iščemo, je $\cup_{k=1}^{7} B_k$. *Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije je*

$$
\begin{aligned}
& P\left(\bigcup_{k=1}^{7} B_k\right) \\
& \quad = \sum_{l=1}^{7} (-1)^{l-1} \binom{7}{l} P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_l) \\
& \quad = 7 \cdot \frac{\binom{24}{3}}{\binom{312}{3}} - 21 \cdot \frac{\binom{24}{5}}{\binom{312}{5}} + 35 \cdot \frac{\binom{24}{7}}{\binom{312}{7}} - 35 \cdot \frac{\binom{24}{9}}{\binom{312}{9}} + 21 \cdot \frac{\binom{24}{11}}{\binom{312}{11}} - 7 \cdot \frac{\binom{24}{13}}{\binom{312}{13}} + \frac{\binom{24}{15}}{\binom{312}{15}} \\
& \quad = 7 \cdot \frac{\binom{309}{21}}{\binom{312}{24}} - 21 \cdot \frac{\binom{307}{19}}{\binom{312}{24}} + 35 \cdot \frac{\binom{305}{17}}{\binom{312}{24}} - 35 \cdot \frac{\binom{303}{15}}{\binom{312}{24}} + 21 \cdot \frac{\binom{301}{13}}{\binom{312}{24}} - 7 \cdot \frac{\binom{299}{11}}{\binom{312}{24}} + \frac{\binom{297}{9}}{\binom{312}{24}} .
\end{aligned}
$$

Pri tej nalogi je rezultate dovolj izraziti z osnovnimi računskimi operacijami in binomskimi simboli.

3. (20) V genetskem bazenu imamo $2n$ genov tipa A in $2n$ genov tipa a. Nova generacija $2n$ posameznikov se oblikuje tako, da iz vseh $4n$ genov oblikujemo $2n$ posameznikov z dvema genoma, pri čemer so vse možne razporeditve genov v pare enako verjetne. Kot znano lahko privzemete, da lahko $2m$ objektov, ki jih ločimo, razporedimo v pare na $\frac{(2m)!}{m!\cdot 2^m}$ načinov (če ne ločimo niti parov niti pozicij v posameznem paru).

Genotipi posameznikov so lahko AA, Aa in aa (aA je isto kot Aa). Naj bo X število posameznikov tipa AA, Y število posameznikov tipa Aa in Z število posameznikov tipa aa v novi generaciji.

a. (10) Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: možne vrednosti za X so $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. Razmestive, ugodne za dogodek $\{X = k\}$, preštejemo v korakih:

- *za dan r izberemo $2r$ genov tipa A na $\binom{2n}{2r}$ načinov.*
- *izbranih $2r$ genov A lahko razmestimo po parih na $\frac{(2r)!}{r!\cdot 2^r}$ načinov.*
- *ostalim $2n-2r$ genom A moramo izbrati $2n-2r$ genov a, kar lahko na $\binom{2n}{2n-2r}$ načinov.*
- *izbrane A in a gene lahko razmestimo v pare tipa Aa na $(2n-2r)!$ načinov.*
- *preostalih $2r$ a genov lahko razmestimo po parih na $\frac{(2r)!}{r!\cdot 2^r}$ načinov.*

Sledi

$$P(X = r) = \frac{\binom{2n}{2r}\binom{2n}{2n-2r}\cdot((2r)!)^2(2n-2r)!}{(r!)^2\cdot 2^{2r}\cdot\frac{(4n)!}{(2n)!\cdot 2^{2n}}}\,.$$

Poenostavimo v

$$P(X = r) = \frac{\binom{2n}{2r}\binom{2r}{r}2^{2n-2r}}{\binom{4n}{2n}}\,.$$

b. (10) Navedite porazdelitev trojice (X, Y, Z).

Rešitev: možne vrednosti so trojice (r, s, t) z $2r + s = 2n$ in $s + 2t = n$, torej $r = t$ Razmestitve, ugodne za dogodek $\{X = r, Y = s, Z = t\}$, preštejemo v nekaj korakih:

- *$2r$ genov tipa A lahko izberemo na $\binom{2n}{2r}$ načinov.*
- *$2t$ genov tipa a lahko izberemo na $\binom{2n}{2t}$ načinov.*
- *Izbranih $2r$ genov tipa A lahko razmestimo po parih na $\frac{(2r)!}{r!\cdot 2^r}$ načinov.*
- *Izbranih $2t$ genov tipa a lahko razmestimo po parih na $\frac{(2t)!}{t!\cdot 2^r}$ načinov.*
- *Preostalih $4n-2r-2t$ genov moramo razmestiti v pare tipa Aa, kar lahko na $(2n-r-t)!$ načinov.*

Sledi, da je

$$P(X = r, Y = s, Z = t) = \frac{\binom{2n}{2r}\binom{2n}{2t} \cdot (2n - r - t)! \cdot (2r)! \cdot (2t)! \cdot 2^{2n} \cdot (2n)!}{(4n)! \cdot r! \cdot t! \cdot 2^{r+t}}\,.$$

Opomba: ker je $\{X = r\} = \{X = r, Y = 2n - 2r, Z = r\}$*, lahko razberemo rešitev točke a iz rešitve b.*

Pri tej nalogi je rezultate dovolj izraziti z osnovnimi računskimi operacijami in binomskimi simboli.

4. (20) Pri *Poker testu* za kontrolo generatorjev slučajnih števil nastopi naslednji problem: imamo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ z enakomerno porazdelitvijo na množici $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ za neki $m > 0$. Naj bo X število različnih števil v množici $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$. Primer: za množico $\{1, 2, 5, 2, 5\}$ dobimo $X = 3$.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: za $k = 0, 1, \ldots, m-1$ definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če se število } k \textit{ pojavi v množici } \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Zapišemo lahko $X = I_0 + \cdots + I_{m-1}$. Zaradi enakomerne porazdelitve imajo vsi indikatorji enako porazdelitev. Računamo

$$P(I_k = 0) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^5, \qquad P(I_k = 1) = 1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^5.$$

Sledi

$$E(X) = m\left[1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^5\right].$$

b. (10) Izračunajte $E\big[X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)\big]$.

Rešitev: izraz v oklepaju je različen od 0, le če je $X = 5$. Sledi, da je

$$E\big[X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)\big] = 5! \cdot P(X = 5).$$

Dogodek $\{X = 5\}$ se zgodi, če so vsi ξ_k različni. Izberimo 5 elementov iz množice $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, kar lahko storimo na $\binom{m}{5}$ načinov, te vrednosti pa se lahko pojavijo v 5! različnih vrstnih redih, ki imajo vsi verjetnost m^{-5}. Sledi

$$E\big[X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)\big] = \frac{5! \cdot 5! \cdot \binom{m}{5}}{m^5}.$$

5. (20) V posodi imamo N kroglic, ki imajo m različnih barv. Števila kroglic posameznih barv so $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Iz posode naključno in brez vračanja izberemo n kroglic, tako da so vsi nabori n kroglic enako verjetni.

a. (10) Z X_k označimo število kroglic barve k. Za $k \neq l$ izračunajte $E(X_k X_l)$. Lahko uporabite, da za $Y \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B, N)$ velja

$$E(Y^2) = n \cdot \frac{B}{N} \cdot \frac{N-B}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} + n^2 \cdot \frac{B^2}{N^2}\,.$$

Rešitev: po eni strani je $X_k + X_l \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B_k + B_l, N)$, *zato je*

$$E\left[(X_k + X_l)^2\right] = n \cdot \frac{B_k + B_l}{N} \cdot \frac{N - B_k - B_l}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} + n^2 \cdot \frac{(B_k + B_l)^2}{N^2}\,.$$

Po drugi strani je zaradi linearnosti

$$E\left(X_k^2 + 2X_kX_l + X_l^2\right) = E(X_k^2) + 2E(X_kX_l) + E(X_l^2)\,.$$

Sledi

$$E(X_kX_l) = \frac{1}{2}\left(E\left[(X_k + X_l)^2\right] - E(X_k)^2 - E(X_l^2)\right)\,.$$

Ker je $X_k \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B_k, N)$, *sledi z vstavljanjem*

$$E(X_kX_l) = -n \cdot \frac{B_k}{N} \cdot \frac{B_l}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} + n^2 \cdot \frac{B_kB_l}{N^2}\,,$$

kar se poenostavi v

$$E(X_kX_l) = \frac{nB_kB_l(n-1)}{N(N-1)}\,.$$

b. (10) Naj bo Z število barv, ki imajo vsaj enega predstavnika med izbranimi kroglicami. Izračunajte $E(Z)$.

Rešitev: definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \textit{če barva } k \textit{ ima predstavnika med izbranimi barvami;} \\ 0 & \textit{sicer;} \end{cases}$$

Velja $Z = I_1 + \cdots + I_m$ *in*

$$P(I_k = 0) = \frac{\binom{N-B_k}{n}}{\binom{N}{n}}\,,$$

kjer interpretiramo $\binom{a}{b} = 0$, *če je* $b > a$. *Sledi*

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\binom{N-B_k}{n}}{\binom{N}{n}}\right)\,.$$

6. (20) Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $[1, \infty)$ je porazdeljena zvezno z gostoto, ki je na omenjenem poltraku enaka

$$f(t) = \frac{1}{t^2}\,.$$

Za $T \geq 1$ se da enolično zapisati

$$T = (D + R) \cdot 3^N\,,$$

kjer je $D \in \{1, 2\}$, $0 \leq R < 1$ in $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Tako smo definirali nove slučajne spremenljivke N, D in R.

Primer: za $T = 7{,}2$ je $T = 2{,}4 \cdot 3^1$, torej je $D = 2$, $R = 0{,}4$ in $N = 1$.

a. (5) Izračunajte skupno porazdelitev teh treh slučajnih spremenljivk, in sicer tako da za poljuben $d \in \{1, 2\}$, poljuben $0 \leq r < 1$ in poljuben $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ izračunate $P(D = d, R \leq r, N = n)$.

Rešitev: velja

$$\begin{aligned}
P(D = d, R \leq r, N = n) &= P\big(d \cdot 3^n \leq T \leq (d + r) \cdot 3^n\big) \\
&= \int_{d \cdot 3^n}^{(d+r)\cdot 3^n} \frac{1}{t^2}\,dt \\
&= 3^{-n}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d + r}\right)\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Določite enorazsežne porazdelitve omenjenih slučajnih spremenljivk. Katere izmed njih so diskretne in katere zvezne? Za zvezne določite gostoto.

Rešitev: porazdelitev slučajne spremenljivke N je diskretna in jo najlažje določimo neposredno – za $n = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$P(N = n) = P\big(3^n \leq T \leq (d + r) \cdot 3^{n+1}\big) = \int_{3^n}^{3^{n+1}} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{2}{3^{n+1}}\,.$$

Z drugimi besedami, $N + 1 \sim \mathrm{Geom}(2/3)$.

Nadalje se za $d \in \{1, 2\}$ in $0 \leq r < 1$ splača izračunati

$$\begin{aligned}
P(D = d, R \leq r) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(D = d, R \leq r, N = n) \\
&= \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d + r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d + r}\right)\,.
\end{aligned}$$

Naredimo limito, ko gre r od spodaj proti 1, in dobimo:

$$P(D = d) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+1}\right)$$

oziroma

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Tudi ta porazdelitev je seveda diskretna. Končno za $0 \le r < 1$ velja:

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(R \le r) \\ &= P(D = 1, R \le r) + P(D = 2, R \le r) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2}\right), \end{aligned}$$

medtem ko za $r < 0$ velja $F_R(r) = 0$, za $r \ge 1$ pa $F_R(r) = 1$. Kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke R je torej zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, kar pomeni, da je slučajna spremenljivka R porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{(r+1)^2} - \dfrac{1}{(r+2)^2}\right) & ;\ 0 < r < 1 \\ 0 & ;\ \textit{sicer.} \end{cases}$$

c. (5) Sta slučajni spremenljivki R in N neodvisni?

Rešitev: Za $0 \le r < 1$ in $n = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$\begin{aligned} P(R \le r, N = n) &= P(D = 1, R \le r, N = n) + P(D = 2, R \le r, N = n) \\ &= 3^{-n}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right), \end{aligned}$$

kar je produkt funkcije samo spremenljivke r in funkcije samo spremenljivke n. S seštevanjem dobimo, da je potem tudi verjetnost $P(R \le r, N \le n)$ produkt funkcije samo spremenljivke r in funkcije samo spremenljivke n, in to za vse $r, n \in \mathbb{R}$. Sledi, da sta R in N neodvisni.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

1. kolokvij

6. 12. 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

6. (20) Iz posode, v kateri so 4 rdeče, 3 zelene in 2 beli kroglici, na slepo in brez vračanja vlečemo kroglice, dokler ne izvlečemo tako rdeče kot tudi zelene kroglice.

a. (15) Določite porazdelitev števila izvlečenih kroglic.

Rešitev: če število izvlečenih kroglic označimo z X, lahko ta slučajna spremenljivka zavzame vrednosti 2, 3, 4, 5, 6 ali 7. Če si predstavljamo, da vlečemo še kar naprej do konca, in glede na to definiramo dogodke:

$$\begin{aligned}
R_k &:= \{\textit{v } k\textit{-tem vlečenju izvlečemo rdečo kroglico}\}\,,\\
Z_k &:= \{\textit{v } k\textit{-tem vlečenju izvlečemo zeleno kroglico}\}\,,\\
R'_k &:= \{\textit{v prvih } k \textit{ vlečenjih ne izvlečemo rdeče kroglice}\}\,,\\
Z'_k &:= \{\textit{v prvih } k \textit{ vlečenjih ne izvlečemo zelene kroglice}\}\,,\\
\tilde{B}_k &:= \{\textit{v prvih } k \textit{ vlečenjih izvlečemo same bele kroglice}\}\,,
\end{aligned}$$

za $k \in \{2,3,4,5,6,7\}$ velja:

$$\begin{aligned}
\{X = k\} &= \big((R'_{k-1} \setminus Z'_{k-1}) \cap R_k\big) \cup \big((Z'_{k-1} \setminus R'_{k-1}) \cap Z_k\big)\\
&= \big((R'_{k-1} \setminus \tilde{B}_{k-1}) \cap R_k\big) \cup \big((Z'_{k-1} \setminus \tilde{B}_{k-1}) \cap Z_k\big)\,.
\end{aligned}$$

Druga oblika je pripravnejša za izračun verjetnosti. Ob standardnem dogovoru, da je $\binom{n}{k} = 0$ za $k \notin \{0,1,\ldots,n\}$, velja:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \big(P(R'_{k-1}) - P(\tilde{B}_{k-1})\big)P\big(R_k \,\big|\, R'_{k-1} \setminus \tilde{B}_{k-1}\big) + \\
&\qquad + \big(P(Z'_{k-1}) - P(\tilde{B}_{k-1})\big)P\big(Z_k \,\big|\, Z'_{k-1} \setminus \tilde{B}_{k-1}\big)\\
&= \frac{4 \cdot \binom{5}{k-1} + 3 \cdot \binom{6}{k-1} - 7 \cdot \binom{2}{k-1}}{(10-k) \cdot \binom{9}{k-1}}\\
&= \frac{\binom{10-k}{4}}{\binom{9}{4}} \cdot \frac{4}{10-k} + \frac{\binom{10-k}{3}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{3}{10-k} - \frac{\binom{10-k}{3-k}}{\binom{9}{2}} \cdot \frac{7}{10-k}\,,
\end{aligned}$$

kar nam da:

$$\begin{aligned}
X &\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{84}{252} & \frac{78}{252} & \frac{50}{252} & \frac{26}{252} & \frac{11}{252} & \frac{3}{252} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{42} & \frac{25}{126} & \frac{13}{126} & \frac{11}{252} & \frac{1}{84} \end{pmatrix}\\
&\doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0{,}3333 & 0{,}3095 & 0{,}1984 & 0{,}1032 & 0{,}0437 & 0{,}0119 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da je zadnja izvlečena kroglica rdeča?

Rešitev: če si spet zamislimo, da vlečemo še kar naprej do konca, so lahko izidi vse možne permutacije kroglic; seveda so vsi izidi enako verjetni. Permutacijo vseh kroglic pa lahko dobimo tudi tako, da najprej razporedimo rdeče in zelene kroglice, nakar mednje vrinemo dve beli kroglici. Ker lahko to pri vsaki razporeditvi rdečih in zelenih kroglic naredimo na enako mnogo ($8 \cdot 9 = 72$*) načinov, so enako verjetni tudi vsi vrstni redi, pri katerih gledamo le rdeče in zelene kroglice. Iskani dogodek v tem primeru sovpada z dogodkom, da je prva izvlečena kroglica zelena, zato je njegova verjetnost enaka* $3/7 \doteq 0{,}4286$.

V tej nalogi je treba vse rezultate navesti v obliki preprostih ulomkov ali pa numerično na najmanj štiri decimalke natančno.