

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

1. KOLOKVIJ

4. 12. 2025

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.				•	
4.				•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Butalci oni dan najdejo $n \geq 2$ zakladov in jih skrijejo v n skrivališč – v vsako skrivališče po en zaklad. Podnevi si svoje zaklade ogledujejo, ponoči pa spijo. Tepanjčani vsako noč iščejo zaklade ter vsak še neodkrit zaklad najdejo in ukradejo z verjetnostjo p . Privzamemo, da so vsa odkritja neodvisna tako med dnevi kot tudi med skrivališči.

- a. (5) Označimo z A_i dogodek, da so imeli Butalci i -ti dan po odkritju v rokah še natanko en zaklad. Izračunajte $P(A_i)$.

Rešitev: vsak zaklad je i -ti dan po odkritju še na mestu z verjetnostjo $(1-p)^i$ in ukraden z verjetnostjo $1 - (1-p)^i$. Torej je $P(A_i) = n(1-p)^i(1 - (1-p)^i)^{n-1}$.

- b. (5) Za $i < j$ izračunajte $P(A_i \cap A_j)$.

Rešitev: če je posamezen zaklad i -ti dan še na mestu, je tudi j -ti dan še na mestu s pogojno verjetnostjo $(1-p)^{j-i}$. Torej je $P(A_j|A_i) = (1-p)^{j-i}$ in končno

$$P(A_i \cap A_j) = n(1-p)^j(1 - (1-p)^i)^{n-1}.$$

- c. (10) Izračunajte verjetnost dogodka, da so imeli Butalci vsaj en dan v rokah natanko en zaklad. Dovolj je, da rezultat zapišete v obliki vrste.

Namig: enkrat mora biti prvič.

Rešitev: označimo z B_i dogodek, da se je i -ti dan po odkritju prvič zgodilo, da so imeli Butalci v rokah natanko en zaklad. To pomeni, da prejšnje dni to ni bilo res, a dovolj je, da to ni bilo res en dan prej. Torej je $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ in sledi

$$P(B_i) = P(A_i) - P(A_{i-1} \cap A_i) = n(1-p)^i \left[(1 - (1-p)^i)^{n-1} - (1 - (1-p)^{i-1})^{n-1} \right]$$

(račun je pravilen tudi za $i = 1$). Dogodek, da so imeli Butalci vsaj en dan v rokah natanko en zaklad, je disjunktna unija dogodkov B_1, B_2, B_3, \dots , zato je njegova verjetnost enaka

$$\begin{aligned} & n \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i (1 - (1-p)^i)^{n-1} - n \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i (1 - (1-p)^{i-1})^{n-1} = \\ & = n \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i (1 - (1-p)^i)^{n-1} - n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+1} (1 - (1-p)^i)^{n-1} = \\ & = np \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i (1 - (1-p)^i)^{n-1}. \end{aligned}$$

Potenco lahko razvijemo in tako dobimo alternativno obliko v obliki končne vsote

$$\begin{aligned} np \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (1-p)^{ki} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} (1-p)^{(k+1)i} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{k+1}}{1 - (1-p)^{k+1}}. \end{aligned}$$

2. (20) V r škatel mečemo n kroglic. Meti so med sabo neodvisni, posamezno škatlico pa zadenemo z verjetnostjo $1/r$. Privzemite, da je $n \geq r$. Naj bo A_k dogodek, da je po n metih v k -ti škatlici vsaj ena kroglica za $k = 1, 2, \dots, r$.

a. (10) Izračunajte $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r)$.

Rešitev: zgornja unija je dogodek, da je v vsaj eni od prvih k škatlic vsaj kakšna kroglica. Pri vsakem metu je verjetnost, da zadenemo kakšno od prvih k škatlic enaka k/r . Ker so meti neodvisni, sledi

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_k^c) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

Sledi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = 1 - \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

b. (10) Izračunajte

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r).$$

Dobljene vsote vam ni treba poenostaviti.

Rešitev: lažje bo poiskati verjetnost nasprotnega dogodka. Po formuli za vključitve in izključitve in z uporabo simetrije je

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_r^c) &= \\ &= rP(A_1^c) - \binom{r}{2}P(A_1^c \cap A_2^c) + \binom{r}{3}P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) - \\ &\quad \dots + (-1)^{r-1}P(A_1^c \cap \dots \cap A_r^c) \\ &= \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

3. (20) Naj bo Π naključno izbrana permutacija števil $\{1, 2, \dots, n\}$. Privzamemo, da vsako permutacijo izberemo z enako verjetnostjo. Rečemo, da se pri elementu i začne naraščajoče zaporedje dolgo vsaj k , če za $i = 1$ velja

$$\Pi(1) < \Pi(2) < \dots < \Pi(k),$$

za $i = 2, 3, \dots, n - k + 1$ pa

$$\Pi(i - 1) > \Pi(i) < \Pi(i + 1) < \dots < \Pi(i + k - 1).$$

Naj bo X_k število elementov v $\{1, 2, \dots, n\}$, pri katerih se začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

- a. (5) Izračunajte verjetnost dogodka, da se v $i = 1$ začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

Rešitev: prešteti moramo ugodne permutacije. Števila $\{1, 2, \dots, k\}$ se preslikajo v podmnožico $\{1, 2, \dots, n\}$, ki jo lahko izberemo na $\binom{n}{k}$ načinov. Ko jih enkrat izberemo, jih uredimo po velikosti. Ostalih $n - k$ števil lahko poljubno premutiramo. Ugodnih permutacij je

$$\binom{n}{k} \cdot (n - k)!.$$

Za verjetnost delimo z $n!$ in dobimo $\frac{1}{k!}$.

- b. (5) Izračunajte verjetnost dogodka, da se v $i > 1$ začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

Rešitev: množico števil, v katere se preslikajo $i - 1, i, \dots, i + k - 1$ lahko izberemo na $\binom{n}{k+1}$ načinov, število $i - 1$ se lahko preslika v katerokoli razen najmanjšega, torej je število možnosti za $\Pi(i - 1)$ enako k , ostala števila pa morajo biti v naraščajočem vrstnem redu. Ostala števila lahko poljubno premutiramo na $(n - k - 1)!$ načinov. Ugodnih permutacij je

$$\binom{n}{k+1} \cdot k \cdot (n - k - 1)!$$

in s tem verjetnost enaka $\frac{k}{(k+1)!}$.

- c. (10) Izračunajte $E(X_k)$.

Rešitev: fiksirajmo k in definirajmo

$$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{če se v } i \text{ začne zaporedje dolžine vsaj } k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X_k = I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{k,n-k+1}$. Ker je

$$P(I_{k1} = 1) = \frac{1}{k!}$$

in

$$P(I_{ki} = 1) = \frac{k}{(k+1)!}$$

za $i > 1$, seštejemo in dobimo

$$E(X_k) = \frac{1}{k!} + (n-k) \frac{k}{(k+1)!} = \frac{nk - k^2 + k + 1}{(k+1)!}.$$

4. (20) Naj bo $a, b > 0$ in X slučajna spremenljivka, porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_X(x) = c e^{-a^2x^2 - b^2/x^2}$$

za $x > 0$ (sicer pa je gostota enaka nič). Konstanta c je izbrana tako, da je integral gostote enak 1. Slučajno spremenljivko Y definiramo kot

$$Y := aX - b/X.$$

a. (10) Določite gostoto $f_Y(y)$ slučajne spremenljivke Y .

Rešitev: pomagamo si lahko s kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $x > 0$ velja

$$F_X(x) = c \int_0^x e^{-a^2t^2 - b^2/t^2} dt.$$

Funkcija $h(x) = ax - b/x$ je strogo naraščajoča in bijektivno preslika $(0, \infty)$ na celo realno os. Torej za vse $y \in \mathbb{R}$ velja

$$F_Y(y) = F_X(h^{-1}(y)) = c \int_0^{h^{-1}(y)} e^{-a^2t^2 - b^2/t^2} dt = c \int_0^{h^{-1}(y)} e^{-(h(t))^2 - 2ab} dt.$$

S substitucijo

$$u = h(t), \quad t = h^{-1}(u) = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a}, \quad dt = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a\sqrt{u^2 + 4ab}} du$$

dobimo

$$F_Y(y) = c \int_{-\infty}^y \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a\sqrt{u^2 + 4ab}} e^{-u^2 - 2ab} du.$$

Slučajna spremenljivka Y je torej porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_Y(y) = \frac{c(y + \sqrt{y^2 + 4ab})}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} e^{-y^2 - 2ab}.$$

b. (5) Slučajna spremenljivka W naj bo porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_W(w) = \frac{f_Y(w) + f_Y(-w)}{2}.$$

Poimenujte to porazdelitev.

Rešitev: velja

$$f_W(w) = \frac{c}{2a} e^{-w^2 - 2ab},$$

to pa je normalna porazdelitev s pričakovano vrednostjo 0 in varianco 1/2.

c. (5) Izračunajte integral $\int_0^\infty e^{-a^2x^2-b^2/x^2} dx$.

Rešitev: gostota normalne porazdelitve s pričakovano vrednostjo 0 in varianco 1/2 je:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2}.$$

Izenačimo z izrazom iz prejšnje točke in dobimo

$$\frac{c}{2a} e^{-2ab} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

oziroma

$$c = \frac{2a e^{2ab}}{\sqrt{\pi}}.$$

Sledi

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2-b^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} e^{-2ab}}{2a}.$$

5. (20) V posodi je $B \geq 2$ belih in R rdečih kroglic. Kroglice iz posode izbiramo zapovrstjo naključno brez vračanja. Naj bo X število izbiranj do vključno prve bele kroglice, Y pa število izbiranj do vključno druge bele kroglice.

a. (10) Izračunajte *skupno* porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y .

Rešitev: možni pari vrednosti za slučajni spremenljivki X in Y so vsi celoštevilski pari (k, l) , za katere je $1 \leq k < l \leq R + 2$. Če naj se dogodek $\{X = k, Y = l\}$ zgodi, moramo najprej dobiti $k - 1$ rdečih kroglic, belo, $l - k - 1$ rdečih in spet belo. Označimo $N = B + R$. Verjetnost danega dogodka lahko izračunamo kot

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= \frac{R}{N} \cdot \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{B}{N-k+1} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{R-k+1}{N-k} \cdots \frac{R-l+3}{N-l+2} \cdot \frac{B-1}{N-l+1} \\ &= \frac{B(B-1) R! (N-l)!}{(R-l+2)! N!} \end{aligned}$$

ali kot

$$P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{N-l}{B-2}}{\binom{N}{B}} = \frac{B(B-1) R! (N-l)!}{(R-l+2)! N!}.$$

b. (10) Utemeljite, da za vse $l = 2, 3, \dots, R + 2$ in $k = 1, 2, \dots, l - 1$ velja

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{l-1} P(Y = l).$$

Rešitev: uporabimo formulo za robno porazdelitev

$$P(Y = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Y = l)$$

in opazimo, da so vse verjetnosti v vsoti enake (neodvisne od k). Trditev sledi.

6. (20) Tri kobilice sedijo v ogliščih enakostraničnega trikotnika. Tik pred trenutki $n = 1, 2, \dots$ se vsaka odloči, da skoči v eno od sosednjih oglišč. Vsako od oglišč izbere z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, neodvisno od ostalih dveh kobilic in neodvisno od prejšnjega dogajanja.

V prvem scenariju je na začetku vsaka kobilica v svojem oglišču. S p_n označite verjetnost, da se bodo kobilice v trenutku n ali prej srečale v enem od oglišč.

V drugem scenariju sta na začetku dve kobilici v istem oglišču, ena pa v svojem. S q_n označite verjetnost, da se bodo kobilice v trenutku n ali prej srečale v enem od oglišč.

a. (10) Za $n \geq 2$ izrazite p_n s p_{n-1} in q_{n-1} ter q_n s p_{n-1} , q_{n-1} in ulomki.

Rešitev: če so na začetku vse kobilice v različnih ogliščih, je po prvem koraku osem možnosti. Mislimo si, da vsaka kobilica vrže svoj kovanec. Če dobi grb, se premakne v smeri urinega kazalca, če številko, pa v smeri nasproti urinega kazalca. Dve od možnosti vodita do tega, da so kobilice še vedno vsaka v svojem oglišču, ostale pa do tega, da ste dve v enem, ena pa v svojem. Verjetnosti za ti dve možnosti sta $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$. Iz tega tudi izhaja, da je $p_1 = 0$. Z upoštevanjem neodvisnosti vseh metov po formuli za popolno verjetnost sledi

$$p_n = \frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{3}{4}q_{n-1}.$$

Podobno za drugo izhodiščno razmestitev ugotovimo, da je po prvem koraku ali vsaka kobilica v svojem oglišču, dve v skupnem in ena v svojem ali so vse tri v istem oglišču. Verjetnosti za te dogodke so po vrsti $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$ in $\frac{1}{8}$. Upoštevanje neodvisnosti nam da

$$q_n = \frac{2}{8}p_{n-1} + \frac{5}{8}q_{n-1} + \frac{1}{8}.$$

Iz zgornjega tudi izhaja, da je $q_1 = \frac{1}{8}$.

b. (10) Označite

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{57}}, \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{57}}{2\sqrt{57}} \quad \text{in} \quad \gamma = \frac{-3 + \sqrt{57}}{2\sqrt{57}}$$

ter

$$\lambda = \frac{7 + \sqrt{57}}{16} \quad \text{in} \quad \mu = \frac{7 - \sqrt{57}}{16}.$$

Kot znano privzemite, da lahko v matrični obliki napišemo

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma/\alpha & -\beta/\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix},$$

kjer je

$$\begin{pmatrix} \gamma/\alpha & -\beta/\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izrazite p_n in q_n s $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ in μ .

Rešitev: iz prvega dela vemo, da je $p_1 = 0$ in $q_1 = 1/8$. Če napišemo rekurzijo simbolično kot

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \mathbf{PDP}^{-1} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix},$$

dobimo po vrsti

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{PDP}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = \mathbf{PDP}^{-1}\mathbf{PDP}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \mathbf{PDP}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix},$$

kar je enako

$$\mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{PDP}^{-1}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}.$$

Po indukciji je

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \mathbf{PD}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{PDP}^{-1} + \dots + \mathbf{PD}^{n-2}\mathbf{P}^{-1}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix},$$

iz česar razberemo p_n in q_n .

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

1. KOLOKVIJ

4. 12. 2025

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.				•	
4.				•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Standarden kup 52 kart dobro premešamo in začnemo deliti karte z vrha kupa.

a. (5) Izračunajte verjetnost, da so prve tri karte rdeče.

Rešitev: označimo $A_i = \{i\text{-ta karta je rdeča}\}$. Računamo

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50}. \end{aligned}$$

b. (5) Izračunajte pogojno verjetnost, da so prve tri karte rdeče pri pogoju, da je prva karta as.

Rešitev: Naj bo $B = \{\text{prva karta je as}\}$. Računamo

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 | B) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B)}{P(B)}.$$

Vemo, da je $P(B) = 4/52$. Podobno kot v prvem delu naloge, je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B) = \frac{2}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50}.$$

c. (5) Izračunajte pogojno verjetnost, da so prve tri karte rdeče pri pogoju, da je tretja karta as.

Rešitev: Naj bo $B = \{\text{tretja karta je as}\}$. Zaradi simetrije je $P(B) = 4/52$. Zaradi simetrije je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B) = \frac{2}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50}.$$

d. (5) Izračunajte verjetnost, da najprej razdelimo vse karte ene barve in nato vse karte druge barve.

Rešitev: Verjetnost, da najprej razdelimo vse rdeče karte je

$$P(\text{najprej vse rdeče karte}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdots \frac{1}{27}.$$

Dogodek, da najprej razdelimo vse črne karte ima enako verjetnost in je disjunkten od dogodka, da najprej razdelimo vse rdeče karte. Sledi

$$P(\text{najprej razdelimo vse karte ene barve}) = 2 \cdot \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdots \frac{1}{27}.$$

2. (20) V r škatel mečemo n kroglic. Meti so med sabo neodvisni, posamezno škatlico pa zadenemo z verjetnostjo $1/r$. Privzemite, da je $n \geq r$. Naj bo A_k dogodek, da je po n metih v k -ti škatlici vsaj ena kroglica za $k = 1, 2, \dots, r$.

a. (10) Izračunajte $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r)$.

Rešitev: zgornja unija je dogodek, da je v vsaj eni od prvih k škatlic vsaj kakšna kroglica. Pri vsakem metu je verjetnost, da zadenemo kakšno od prvih k škatlic enaka k/r . Ker so meti neodvisni, sledi

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_k^c) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

Sledi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = 1 - \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

b. (10) Izračunajte

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r).$$

Dobljene vsote vam ni treba poenostaviti.

Rešitev: lažje bo poiskati verjetnost nasprotnega dogodka. Po formuli za vključitve in izključitve in z uporabo simetrije je

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_r^c) &= \\ &= rP(A_1^c) - \binom{r}{2}P(A_1^c \cap A_2^c) + \binom{r}{3}P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) - \\ &\quad \dots + (-1)^{r-1}P(A_1^c \cap \dots \cap A_r^c) \\ &= \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

3. (20) Naj bo Π naključno izbrana permutacija števil $\{1, 2, \dots, n\}$. Privzamemo, da vsako permutacijo izberemo z enako verjetnostjo. Rečemo, da se pri elementu i začne naraščajoče zaporedje dolgo vsaj k , če za $i = 1$ velja

$$\Pi(1) < \Pi(2) < \dots < \Pi(k),$$

za $i = 2, 3, \dots, n - k + 1$ pa

$$\Pi(i - 1) > \Pi(i) < \Pi(i + 1) < \dots < \Pi(i + k - 1).$$

Naj bo X_k število elementov v $\{1, 2, \dots, n\}$, pri katerih se začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

- a. (5) Izračunajte verjetnost dogodka, da se v $i = 1$ začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

Rešitev: prešteti moramo ugodne permutacije. Števila $\{1, 2, \dots, k\}$ se preslikajo v podmnožico $\{1, 2, \dots, n\}$, ki jo lahko izberemo na $\binom{n}{k}$ načinov. Ko jih enkrat izberemo, jih uredimo po velikosti. Ostalih $n - k$ števil lahko poljubno premutiramo. Ugodnih permutacij je

$$\binom{n}{k} \cdot (n - k)!.$$

Za verjetnost delimo z $n!$ in dobimo $\frac{1}{k!}$.

- b. (5) Izračunajte verjetnost dogodka, da se v $i > 1$ začne naraščajoče zaporedje dolžine vsaj k .

Rešitev: množico števil, v katere se preslikajo $i - 1, i, \dots, i + k - 1$ lahko izberemo na $\binom{n}{k+1}$ načinov, število $i - 1$ se lahko preslika v katerokoli razen najmanjšega, torej je število možnosti za $\Pi(i - 1)$ enako k , ostala števila pa morajo biti v naraščajočem vrstnem redu. Ostala števila lahko poljubno premutiramo na $(n - k - 1)!$ načinov. Ugodnih permutacij je

$$\binom{n}{k+1} \cdot k \cdot (n - k - 1)!$$

in s tem verjetnost enaka $\frac{k}{(k+1)!}$.

- c. (10) Izračunajte $E(X_k)$.

Rešitev: fiksirajmo k in definirajmo

$$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{če se v } i \text{ začne zaporedje dolžine vsaj } k \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X_k = I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{k,n-k+1}$. Ker je

$$P(I_{k1} = 1) = \frac{1}{k!}$$

in

$$P(I_{ki} = 1) = \frac{k}{(k+1)!}$$

za $i > 1$, seštejemo in dobimo

$$E(X_k) = \frac{1}{k!} + (n-k) \frac{k}{(k+1)!} = \frac{nk - k^2 + k + 1}{(k+1)!}.$$

4. (20) Naj bo $a, b > 0$ in X slučajna spremenljivka, porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_X(x) = c e^{-a^2 x^2 - b^2/x^2}$$

za $x > 0$ (sicer pa je gostota enaka nič). Konstanta c je izbrana tako, da je integral gostote enak 1. Slučajno spremenljivko Y definiramo kot

$$Y := aX - b/X.$$

a. (10) Določite gostoto $f_Y(y)$ slučajne spremenljivke Y .

Rešitev: pomagamo si lahko s kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $x > 0$ velja

$$F_X(x) = c \int_0^x e^{-a^2 t^2 - b^2/t^2} dt.$$

Funkcija $h(x) = ax - b/x$ je strogo naraščajoča in bijektivno preslika $(0, \infty)$ na celo realno os. Torej za vse $y \in \mathbb{R}$ velja

$$F_Y(y) = F_X(h^{-1}(y)) = c \int_0^{h^{-1}(y)} e^{-a^2 t^2 - b^2/t^2} dt = c \int_0^{h^{-1}(y)} e^{-(h(t))^2 - 2ab} dt.$$

S substitucijo

$$u = h(t), \quad t = h^{-1}(u) = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a}, \quad dt = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a\sqrt{u^2 + 4ab}} du$$

dobimo

$$F_Y(y) = c \int_{-\infty}^y \frac{u + \sqrt{u^2 + 4ab}}{2a\sqrt{u^2 + 4ab}} e^{-u^2 - 2ab} du.$$

Slučajna spremenljivka Y je torej porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_Y(y) = \frac{c(y + \sqrt{y^2 + 4ab})}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} e^{-y^2 - 2ab}.$$

b. (5) Slučajna spremenljivka W naj bo porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_W(w) = \frac{f_Y(w) + f_Y(-w)}{2}.$$

Poimenujte to porazdelitev.

Rešitev: velja

$$f_W(w) = \frac{c}{2a} e^{-w^2 - 2ab},$$

to pa je normalna porazdelitev s pričakovano vrednostjo 0 in varianco 1/2.

c. (5) Izračunajte integral $\int_0^\infty e^{-a^2x^2-b^2/x^2} dx$.

Rešitev: gostota normalne porazdelitve s pričakovano vrednostjo 0 in varianco 1/2 je:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2}.$$

Izenačimo z izrazom iz prejšnje točke in dobimo

$$\frac{c}{2a} e^{-2ab} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

oziroma

$$c = \frac{2a e^{2ab}}{\sqrt{\pi}}.$$

Sledi

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2-b^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} e^{-2ab}}{2a}.$$

5. (20) V posodi je $B \geq 2$ belih in R rdečih kroglic. Kroglice iz posode izbiramo zapovrstjo naključno brez vračanja. Naj bo X število izbiranj do vključno prve bele kroglice, Y pa število izbiranj do vključno druge bele kroglice.

a. (10) Izračunajte *skupno* porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y .

Rešitev: možni pari vrednosti za slučajni spremenljivki X in Y so vsi celoštevilski pari (k, l) , za katere je $1 \leq k < l \leq R + 2$. Če naj se dogodek $\{X = k, Y = l\}$ zgodi, moramo najprej dobiti $k - 1$ rdečih kroglic, belo, $l - k - 1$ rdečih in spet belo. Označimo $N = B + R$. Verjetnost danega dogodka lahko izračunamo kot

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= \frac{R}{N} \cdot \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{B}{N-k+1} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{R-k+1}{N-k} \cdots \frac{R-l+3}{N-l+2} \cdot \frac{B-1}{N-l+1} \\ &= \frac{B(B-1) R! (N-l)!}{(R-l+2)! N!} \end{aligned}$$

ali kot

$$P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{N-l}{B-2}}{\binom{N}{B}} = \frac{B(B-1) R! (N-l)!}{(R-l+2)! N!}.$$

b. (10) Utemeljite, da za vse $l = 2, 3, \dots, R + 2$ in $k = 1, 2, \dots, l - 1$ velja

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{l-1} P(Y = l).$$

Rešitev: uporabimo formulo za robno porazdelitev

$$P(Y = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Y = l)$$

in opazimo, da so vse verjetnosti v vsoti enake (neodvisne od k). Trditev sledi.

6. (20) Porazdelitev slučajne spremenljivke X naj bo dana z

$$P(X = n) = \frac{\beta^a \cdot a(a+1) \cdots (a+n-1)}{n! \cdot (1+\beta)^{a+n}}$$

za $n = 0, 1, 2, \dots$, kjer sta $a, \beta > 0$. Za $n = 0$ razumemo produkt $a(a+1) \cdots (a+n-1)$ kot 1.

a. (5) Preverite, da za $n \geq 1$ velja

$$nP(X = n) = \frac{(a+n-1)}{1+\beta} P(X = n-1).$$

Rešitev: Enačbo preverimo z neposrednim računom.

b. (15) Izračunajte $E(X)$. Kot znano privzemite, da je $E(X) < \infty$.

Rešitev: Seštejemo leve in desne strani enačbe za $n = 1, 2, \dots$. Dobimo

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) \\ &= \frac{1}{1+\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (a+n-1)P(X = n-1) \\ &= \frac{1}{1+\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(X = n-1) + a \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n-1) \right) \\ &= \frac{1}{1+\beta} (E(X) + a). \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da se verjetnosti v porazdelitvi seštevajo v 1. Linearno enačbo za $E(X)$ rešimo in sledi

$$E(X) = \frac{a}{\beta}.$$