IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST

PISNI IZPIT

27. JANUAR 2021

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) V pralnem stroju se opere n različnih parov nogavic. Iz stroja poberemo naključno podmnožico nogavic (lahko tudi prazno), tako da je vsaka od 2^{2n} podmnožic enako verjetna.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da lahko pobrane nogavice razvrstimo v pare? Za prazno množico velja, da jih lahko.

   Rešitev: Prešteti moramo vse množice, pri katerih lahko ustrezne nogavice razvrstimo v pare. Teh pa je toliko kot podmnožic n-elementne množice, torej 2^n. Iskana verjetnost je torej enaka 2^{-n}.

b. (10) Recimo, da smo pobrane nogavice lahko razvrstili v pare. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo iz stroja potegnili vse nogavice?

   Rešitev: Izmed 2^n možnih izbir, pri katerih lahko nogavice razporedimo v pare, je natanko ena taka, pri kateri smo iz stroja potegnili vse nogavice. Iskana pogojna verjetnost je tako spet enaka 2^{-n}.

2. (20) Na krožnici s polmerom $r = 1$ izberemo naključno točko. V jeziku verjetnosti to pomeni, da je $U \sim U(0, 2\pi)$ in je izbrana točka $(\cos U, \sin U)$. Naj bo X oddaljenost izbrane točke od točke $(-1, 0)$, T pa kot med abscisno osjo in daljico, ki povezuje izbrano točko in točko $(-1, 0)$. Kot je negativen, če je izbrana točka v tretjem ali četrtem kvadrantu.

a. (10) Najdite gostoto slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Prvi način. *Velja*

$$X = \sqrt{(\cos U + 1)^2 + \sin^2 U} = \sqrt{2 + 2\cos U} = 2\sqrt{\cos^2 \frac{U}{2}} = 2\left|\cos \frac{U}{2}\right| .$$

Sledi, da slučajna spremenljivka X *zavzame vrednosti na intervalu* $[0, 2]$. *Upoštevajoč, da* $U/2$ *zavzame vrednosti na intervalu* $[0, \pi]$, *za* $x \in [0, 2]$ *izračunamo*

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= P\left(\left|\cos \frac{U}{2}\right| \le \frac{x}{2}\right) \\ &= P\left(2 \arccos \frac{x}{2} \le U \le 2\pi - 2\arccos \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2\pi - 2\arccos \frac{x}{2}}{2\pi} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{x}{2} . \end{aligned}$$

Z odvajanjem sledi

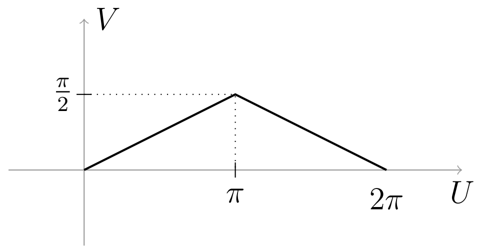
$$f_X(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{4 - x^2}} .$$

Drugi način. *Tako kot pri prvem načinu opazimo, da je* $X = 2\left|\cos \frac{U}{2}\right|$. *Toda transformacijske formule ne moremo neposredno uporabiti, ker funkcija* $g(u) := 2\left|\cos \frac{u}{2}\right|$ *na intervalu* $(0, 2\pi)$ *ni bijektivna.*

Pač pa opazimo, da je tudi $X = 2\cos V$, *kjer je:*

$$V = \begin{cases} U/2 & ; \ 0 < U \le \pi/2 \\ \pi - U/2 & ; \ \pi/2 < U \le \pi . \end{cases}$$

Odvisnost med U *in* V *lahko prikažemo na naslednjem grafu:*



Za $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ *velja*

$$P(V \le v) = P\big(0 \le U \le 2v\big) + P\big(2\pi - 2v \le U \le 2\pi\big) = \frac{2v}{\pi} ,$$

torej je $V \sim U\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$. *Še drugače,* V *je porazdeljena zvezno z gostoto* f_V, *ki je na intervalu* $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ *enaka* $\frac{2}{\pi}$, *drugje pa nič.*

Funkcija $h(v) = 2\cos v$ *pa zdaj bijektivno preslika interval* $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ *na interval* $(0, 1)$ *in njen inverz* $h^{-1}(x) = \arccos\frac{x}{2}$ *je zvezno odvedljiv z odvodom*

$$\big(h^{-1}\big)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\,.$$

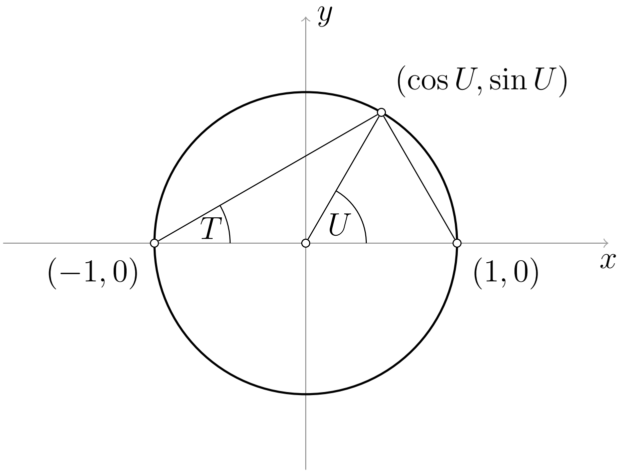
Po transformacijski formuli je za $0 < x < 2$ *torej*

$$f_X(x) = f_V\left(\arccos\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{4 - x^2}}\,,$$

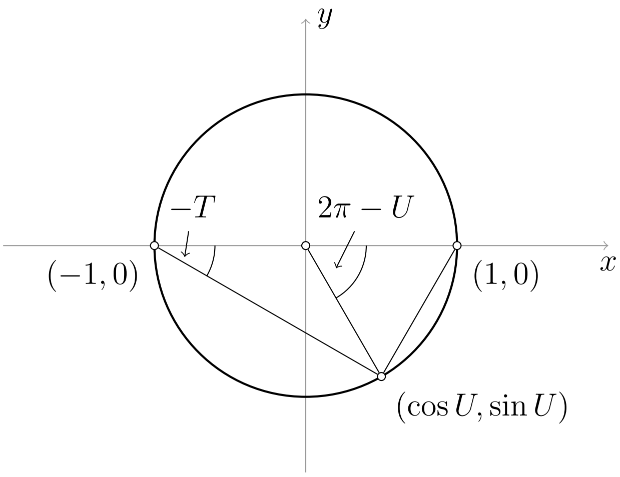
kar je isto kot pri prvem načinu.

b. (10) Najdite gostoto kota T.

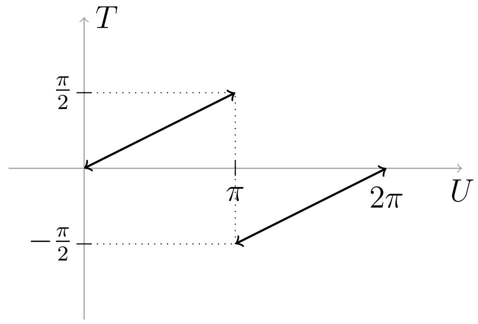
Rešitev: Uporabimo izrek o obodnem in središčnem kotu. Za $0 < U < \pi$ *dobimo naslednjo sliko:*



iz katere po izreku dobimo $T = \frac{U}{2}$. *Za* $-\pi < U < 0$ *pa dobimo naslednjo sliko:*



iz katere po izreku dobimo $T = \frac{U}{2} - \pi$*. Odvisnost med* U *in* T *lahko tako prikažemo na naslednjem grafu:*



Strogo gledano kot T *ni dobro definiran, če izberemo točko* $(-1, 0)$*, torej če je* $U = \pi$*. Toda ker je* U *porazdeljena zvezno, lahko ta primer izločimo. Za* $-\frac{\pi}{2} < T < 0$ *velja*

$$P(T \leq t) = P\big(\pi < U < 2(t+\pi)\big) = \frac{2t+\pi}{2\pi}\,,$$

za $0 < T < \frac{\pi}{2}$ *pa velja*

$$P(T \leq t) = P(U < 2t) + P(\pi < U < 2\pi) = \frac{2t+\pi}{2\pi}\,.$$

V obeh primerih (in tudi za $t = \pi$*) je* $P(T \leq t) = \dfrac{t + \frac{\pi}{2}}{\pi}$*, torej je* $T \sim U\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta neodvisni z

$$X \sim \Gamma(a, 1) \quad \text{in} \quad Y \sim \Gamma\big(a + \tfrac{1}{2}, 1\big) .$$

a. (10) Izračunajte gostoto slučajnega para $\big(X,\, 2\sqrt{XY}\,\big)$.

Rešitev: Definirajmo

$$(U, V) = \Phi(X, Y) = \big(X,\, 2\sqrt{XY}\,\big) .$$

Velja

$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(u,\, \frac{v^2}{4u}\right)$$

in

$$J_{\Phi^{-1}}(u, v) = \frac{v}{2u} .$$

Po transformacijski formuli za $u, v > 0$ velja

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma\big(a + \frac{1}{2}\big)}\, u^{a-1}(v^2/4u)^{a-1/2} e^{-u-v^2/(4u)} \cdot \frac{v}{2u} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma\big(a + \frac{1}{2}\big)}\, \frac{v^{2a}}{2^{2a} u^{3/2}}\, e^{-u-v^2/(4u)} , \end{aligned}$$

sicer pa lahko postavimo $f_{U,V}(u, v) = 0$.

b. (10) Najdite gostoto slučajne spremenljivke $V = 2\sqrt{XY}$ in jo poimenujte. Kot znano privzemite, da za $\alpha, \beta > 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^{3/2}}\, e^{-\alpha s - \frac{\beta}{s}}\, \mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} .$$

Rešitev: Gostota V je robna gostota para iz prvega dela. Za $v > 0$ izračunamo

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \frac{v^{2a}}{2^{2a}\Gamma(a)\,\Gamma\big(a + \frac{1}{2}\big)} \int_0^\infty \frac{1}{u^{3/2}}\, e^{-u-v^2/(4u)}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{v^{2a}}{2^{2a-1}\Gamma(a)\,\Gamma\big(a + \frac{1}{2}\big)} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{v^2}}\, e^{-v} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2a)}\, v^{2a-1} e^{-v} , \end{aligned}$$

medtem ko lahko za $v \le 0$ postavimo $f_V(v) = 0$.

V zadnji vrsti smo upoštevali, da rezultat mora biti gostota: razpoznali smo namreč gostoto porazdelitve $\Gamma(2a, 1)$, zato vemo, kakšna mora biti konstanta.

Opomba: *iz zgornjega izhaja Legendrova podvojitvena formula za gama funkcijo:*

$$\Gamma(2a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{2a-1}\Gamma(a)\,\Gamma\big(a + \tfrac{1}{2}\big) .$$

4. (20) Naj bo $n \geq 3$ in Π slučajna permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri čemer velja $\Pi(1) \neq 1$; vse možne take permutacije so enako verjetne.

a. (10) Dokažite, da slučajni spremenljivki $\Pi(i)$ in $\Pi(j)$ nista neodvisni za nobena indeksa i in j.

Rešitev: Neodvisnost zagotovo ne velja za $i = j$, saj sta tedaj $\Pi(i)$ in $\Pi(j)$ enaki, obenem pa nista konstantni. Naj bo $i \neq j$. Tedaj je za poljuben $k = 2, 3, \ldots, n$ dogodek $\bigl\{\Pi(i) = \Pi(j) = k\bigr\}$ nemogoč, medtem ko sta dogodka $\bigl\{\Pi(i) = k\bigr\}$ in $\bigl\{\Pi(j) = k\bigr\}$ oba mogoča (s strogo pozitivno verjetnostjo). Tako sta $\Pi(i)$ in $\Pi(j)$ spet odvisni.

b. (10) Za katere pare (i, j) sta slučajni spremenljivki $\Pi(i)$ in $\Pi^{-1}(j)$ neodvisni?

Rešitev: Če indeksa i in j nista oba enaka 1, sta slučajni spremenljivki $\Pi(i)$ in $\Pi^{-1}(j)$ prav tako odvisni, saj sta dogodka $\bigl\{\Pi(i) = j\bigr\}$ in $\bigl\{\Pi^{-1}(j) = i\bigr\}$ enaka in imata verjetnost strogo med 0 in 1, torej sta odvisna.

Naj bo zdaj še $i = j = 1$. Oglejmo si dogodka $A_k := \bigl\{\Pi(1) = k\bigr\}$ in $B_l := \bigl\{\Pi^{-1}(1) = l\bigr\} = \bigl\{\Pi(l) = 1\bigr\}$. Ta dva dogodka sta mogoča natanko tedaj, ko je $k, l \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Lahko si predstavljamo, da permutacijo Π generiramo tako, da najprej izberemo $\Pi(1)$, za kar imamo $n - 1$ možnosti. Nato izberemo $\Pi(l)$, za kar spet imamo $n - 1$ možnosti ne glede na izbiro $\Pi(1)$. Za preostanek permutacije imamo $(n - 2)!$ možnosti ne glede na izbiro $\Pi(1)$ in $\Pi(l)$. Tako dobimo $P(A_k) = P(B_l) = \frac{1}{n-1}$ in $P(A_k \cap B_l) = \frac{1}{(n-1)^2}$, kar pomeni, da sta dogodka A_k in B_l neodvisna za vse $k, l \in \{2, 3, \ldots, n\}$, z njima pa sta neodvisni tudi slučajni spremenljivki $\Pi(1)$ in $\Pi^{-1}(1)$.

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski enako porazdeljeni slučajni spremenljivki. Za vsak $n \geq 0$ in vse $k = 0, 1, \ldots, n$ naj velja

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1} \,.$$

a. (10) Pokažite, da za $|s| < 1$ velja

$$(1 - s)\, G_X(s) = \int_s^1 G_X^2(u)\, \mathrm{d}u \,.$$

Namig: opazite, da je

$$\frac{1 - s^{n+1}}{n+1} = \int_s^1 u^n \,\mathrm{d}u$$

in zamenjajte vrstni red seštevanja in integriranja.

Rešitev: Označimo $W = X + Y$ in pogojne verjetnosti sestavimo v pogojno rodovno funkcijo:

$$E(s^X | W = n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s^k = \frac{1 - s^{n+1}}{(n+1)(1-s)} \,,$$

nakar po formuli za popolno pričakovano vrednost izrazimo brezpogojno rodovno funkcijo:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= E(s^X) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(W = n)\, E(s^X | W = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(W = n)\, \frac{1}{n+1}\, \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s} \\ &= \frac{1}{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} P(W = n) \int_s^1 u^n \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-s} \int_s^1 \sum_{n=0}^{\infty} P(W = n)\, u^n \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-s} \int_s^1 G_W(u)\,\mathrm{d}u \,. \end{aligned}$$

Zgornja neskončna vrsta absolutno konvergira, ker je dominirana s $P(W = n)$. Upoštevamo še $G_W = G_X^2$.

b. (10) Ob predpostavki, da je $E(X) = 1$, navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Namig: odvajajte ob strani enačbe iz prvega dela in rešite diferencialno enačbo.

Rešitev: Po odvajanju integralske enačbe iz prejšnje točke dobimo

$$(1 - s)\, G_X'(s) - G_X(s) = -G_X^2(s) \,.$$

Označimo $y = G_X(s)$, odvod izrazimo z diferenciali, ločimo spremenljivki in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}s}{1-s} = \frac{\mathrm{d}y}{y-y^2}\,.$$

Primer, ko je $y = 0$ ali $y = 1$, moramo obravnavati posebej, toda iz eksistenčnega izreka sledi, da, brž ko za določen $s \neq 1$ velja $y = 0$ ali $y = 1$, mora biti y ves čas enak 0 ali ves čas enak 1. Prvo ni rodovna funkcija, drugo pa je rodovna funkcija konstante 0, kar je v nasprotju s predpostavko, da je $E(X) = 1$. Z deljenjem torej nismo izgubili želene rešitve.

Rodovno funkcijo je dovolj dobiti na nekem neizrojenem intervalu. Vzemimo $0 < s < 1$. Tedaj je $y > 0$. Integriramo in dobimo

$$\log\frac{y}{1-y} = -\log(1-s) + C$$

oziroma

$$\frac{y}{1-y} = \frac{e^C}{1-s}$$

oziroma

$$y = G_X(s) = \frac{e^C}{1+e^C-s}\,.$$

Velja

$$G_X'(s) = \frac{e^C}{\left(1+e^C-s\right)^2}\,,$$

torej

$$E(X) = \lim_{s\uparrow 1} G_X'(s) = e^{-C}\,.$$

Sledi $C = 0$ in

$$G_X(s) = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2} + \frac{s}{2^2} + \frac{s^2}{2^3} + \cdots\,,$$

torej

$$P(X = k) = 2^{-k-1}\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

6. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke s $P(X_i = j) = \frac{1}{m}$ za $j = 1, 2, \ldots, m$. Definirajte

$$L_k = \mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_k\}\,.$$

a. (10) S pogojevanjem najdite zvezo med $E(L_{k-1})$ in $E(L_k)$ in izračunajte $E(L_k)$.

Rešitev: Velja

$$P(L_k = i+1 | L_{k-1} = i) = \frac{m-i}{m} \qquad \textit{in} \qquad P(L_k = i | L_{k-1} = i) = \frac{i}{m}$$

za $i = 1, 2, \ldots, m$. *Iz tega sledi*

$$E(L_k | L_{k+1} = i) = (i+1) \cdot \frac{m-i}{m} + i \cdot \frac{i}{m} = 1 + i\left(1 - \frac{1}{m}\right)\,.$$

Sledi

$$E(L_k) = 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) E(L_{k-1})\,.$$

Velja $E(L_1) = 1$ *in po indukciji*

$$E(L_k) = m\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right)\,.$$

b. (10) Utemeljite, da je

$$E\Big[m(m-1) - L_k(2m-1-L_k)\Big] = \left(1 - \frac{2}{m}\right) E\Big[m(m-1) - L_{k-1}(2m-1-L_{k-1})\Big]\,.$$

Izračunajte $\mathrm{var}(L_k)$.

Rešitev: Uporabimo pogojno porazdelitev iz prvega dela naloge. Računamo

$$\begin{aligned} &E\Big[m(m-1) - L_k(2m-1-L_k) | L_{k-1} = i\Big] \\ &\qquad = m(m-1) - (i+1)(2m-1-i-1) \cdot \frac{m-i}{m} - i(2m-1-i) \cdot \frac{i}{m} \\ &\qquad = \big(m(m-1) - i(2m-1-i)\big)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\,. \end{aligned}$$

Formula v besedilu naloge sledi po formuli za popolno pričakovano vrednost. Ker je $E\big[m(m-1) - L_1(2m-1-L_1)\big] = (m-1)(m-2)$, *sledi*

$$E\Big[m(m-1) - L_k(2m-1-L_k)\Big] = (m-1)(m-2)\left(1 - \frac{2}{m}\right)^{k-1}\,.$$

Končno je

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(L_k) &= (2m-1)E(L_k) - E\big[L_k(2m-1-L_k)\big] - \big(E(L_k)\big)^2 \\ &= m(2m-1)\left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right] - (m-1)(m-2)\left[1 - \left(1 - \frac{2}{m}\right)^k\right] \\ &\qquad - m^2\left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right]^2\,. \end{aligned}$$