Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

26. avgust 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Na 8 mest, ki so razporejena v krogu, neodvisno posadimo ničle in enice, tako da je na vsakem mestu ničla z verjetnostjo 1/2 in enica z verjetnostjo 1/2.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da ne bomo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel?

Namig: načelo vključitev in izključitev.

Rešitev: Prvi način. *Označimo z X maksimalno število zaporednih ničel. Iskana verjetnost je enaka*

$$P(X < 5) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) - P(X = 7) - P(X = 8)\,.$$

Vseh izidov, tj. razporeditev ničel in enic, je $2^8 = 256$. Dogodek $\{X = 8\}$ sestavlja en sam izid (same ničle). Dogodek $\{X = 7\}$ pomeni sedem ničel in eno enico, kar se zgodi pri 8 izidih. Dogodek $\{X = 6\}$ pomeni šest zaporednih ničel in dve zaporedni enici, kar se prav tako zgodi pri 8 izidih. Dogodek $\{X = 5\}$ pa pomeni pet zaporednih ničel, okoli njih na obeh straneh enica, na preostalem prostoru med enicama pa kar koli. To se zgodi pri 16 izidih. Iskana verjetnost je torej enaka

$$P(X < 5) = 1 - \frac{1 + 8 + 8 + 16}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938\,.$$

Drugi način. *Naj bo A dogodek, da smo dobili zaporedje (vsaj) petih ničel. Velja*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8\,,$$

kjer smo oštevilčili zaporedne peterice mest, A_i pa je dogodek, da so v i-ti peterici same ničle. Po načelu vključitev in izključitev je iskana verjetnost enaka

$$P(A^c) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 + p_8\,,$$

kjer je p_k vsota verjetnosti vseh možnih presekov k različnih dogodkov A_i (vseh možnih naborov je torej $\binom{8}{k}$). Izračunajmo sedaj vrednosti p_k za vsak k posebej.

- *Ker za vsak i velja $P(A_i) = 2^{-5}$, je očitno $p_1 = 8 \cdot 2^{-5} = 1/4$.*
- *Če sta i-ta in j-ta peterica sosednji, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-6}$; takih neurejenih parov je 8. Če sta zamaknjeni za dve mesti, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-7}$; takih neurejenih parov je spet 8. Sicer pa je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-8}$; takih neurejenih parov je $\binom{8}{2} - 8 - 8 = 12$. Sledi $p_2 = 8 \cdot 2^{-6} + 8 \cdot 2^{-7} + 12 \cdot 2^{-8} = 15/64$.*
- *Če so i-ta, j-ta in k-ta peterica zaporedne, je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-7}$; takih neurejenih trojic je 8. Sicer je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-8}$; takih neurejenih trojic je $\binom{8}{3} - 8 = 48$. Sledi $p_3 = 8 \cdot 2^{-7} + 48 \cdot 2^{-8} = 1/4$.*
- *Brž ko vzamemo nabor več kot treh peteric, le-te pokrijejo vsa mesta, torej je verjetnost ustreznega preseka enaka $2^{-8} = 1/256$. Za $k = 3, 4, \ldots, 8$ torej velja $p_k = \binom{8}{k}/256$.*

Torej je končno

$$P(A^c) = 1 - 4 + \frac{15}{64} - \frac{1}{4} + \frac{70 - 56 + 28 - 8 + 1}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938\,.$$

b. (5) Recimo, da nismo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bomo dobili zaporedje (vsaj) petih enic?

Rešitev: Izračunati je potrebno $P(B|A^c)$*, kjer je* A *dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih ničel,* B *dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih enic. Toda če se zgodi* B*, se* A *zagotovo ne zgodi, zato je*

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{33}{223} \doteq 0{,}148\,.$$

2. (20) Dan je kup 52 kart, v katerem so 4 asi. Kup dobro premešamo. Naj bo X položaj prvega, Y pa položaj zadnjega asa, oboje šteto od zgoraj navzdol.

a. (10) Za $1 \le k \le 49$ izračunajte verjetnosti $P(X = k)$.

Rešitev:

Prvi način: *zaradi simetrije prvih k kart od zgoraj tvori enostavni slučajni vzorec iz množice* 52 *kart. Porazdelitev števila asov med temi k kartami je hipergeometrijska* HiperGeom$(k, 4, 52)$. *Dogodek* $\{X > k\}$ *se zgodi, če v omenjenem vzorcu velikosti k ni asov. Sledi*

$$P(X > k) = \frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}}$$

in

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{\binom{48}{k-1}}{\binom{52}{k-1}} - \frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}} = \frac{4}{49-k}\,\frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}}\,,$$

pri čemer interpretiramo $\binom{a}{b} = 0$*, če je* $b > a$.

Drugi način: *gledamo položaje asov v kupu, pri čemer asov ne ločimo. Tako je vseh možnih razporeditev asov v kupu* $\binom{52}{4}$*, tistih, pri katerih je najbolj zgornji as na k-tem mestu od zgoraj, pa je* $\binom{52-k}{3}$. *Tako je*

$$P(X = k) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$$

in da se preveriti, da je to isto kot pri prvem načinu.

b. (10) Za $1 \le k \le 48$ in $k - l \ge 3$ izračunajte verjetnosti $P(Y \le l \mid X = k)$. Zapišite še porazdelitev para (X, Y).

Rešitev: pogojno na dogodek $\{X = k\}$ *so med preostalimi* $52-k$ *kartami natanko trije asi in vsi njihovi medsebojni položaji so enako verjetni. Pogojna verjetnost* $P(Y \le l \mid X = k)$ *je zato enaka verjetnosti, da so vsi ti trije asi na položajih* $k+1, k+2, \ldots, l$. *Torej je*

$$P(Y \le l \mid X = k) = \frac{\binom{49-k}{l-k-3}}{\binom{52-k}{l-k}} = \frac{\binom{l-k}{3}}{\binom{52-k}{3}}\,,$$

pri čemer interpretiramo $\binom{a}{b} = 0$*, če je* $b < 0$*; spet se da preveriti, da se obe obliki ujemata. Končno je*

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= P(X = k)\big(P(Y \le l \mid X = k) - P(Y \le l-1 \mid X = k)\big) \\ &= \frac{12}{(49-k)(l-k)}\,\frac{\binom{48}{k}\binom{49-k}{l-k-3}}{\binom{52}{k}\binom{52-k}{l-k}} = \frac{\binom{l-k-1}{2}}{\binom{52}{4}}\,. \end{aligned}$$

Rezultat v slednji obliki pa lahko dobimo tudi neposredno: če gledamo razporeditve štirih asov v kupu, je vseh možnih $\binom{52}{4}$*, takih, pri katerih je* $X = k$ *in* $Y = l$*, pa je* $\binom{l-k-1}{2}$.

3. (20) Naj bosta X in Z neodvisni z $X \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

a. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajnega vektorja

$$\left(Z, \sqrt{2XZ^2}\right).$$

Rešitev: preslikava

$$\Phi(x,z) = \left(z, \sqrt{2xz^2}\right)$$

bijektivno preslika množico $(0,\infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *na množico* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times (0,\infty)$. *Njen inverz je*

$$\Phi^{-1}(z,w) = \left(\frac{w^2}{2z^2},\ z\right)$$

in ima Jacobijevo determinanto

$$J_{\Phi^{-1}}(z,w) = -\frac{w}{z^2}.$$

Če označimo $W := \sqrt{2XZ^2}$, *nam transformacijska formula da*

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w}{z^2} e^{-\frac{w^2}{2z^2} - \frac{z^2}{2}}.$$

b. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $W := \sqrt{2XZ^2}$. Kot znano lahko privzamete, da za $a, b > 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^3}} e^{-\frac{a}{u} - bu}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Rešitev: integrirati moramo po z. *Ker je integrand za fisken* w *sod v* z, *lahko integriramo samo po* $(0,\infty)$. *Nato uvedemo novo spremenljivko* $z^2 = y$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= 2\int_0^\infty f(z,w)dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{w}{z^2} e^{-\frac{w^2}{2z^2} - \frac{z^2}{2}}\, dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{w}{2\sqrt{y^3}} e^{-\frac{w^2}{2y} - \frac{y}{2}}\, dy \\
&= \frac{w}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{w^2}}\, e^{-w} \\
&= e^{-w}.
\end{aligned}$$

4. (20) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, za kateri privzamemo $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$,

$$P(Y = k+1 | X = k) = \frac{n-k}{n}$$

in

$$P(Y = k-1 | X = k) = \frac{k}{n}$$

za vse $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ter $P(Y = l | X = k) = 0$ za $|k - l| > 1$.

a. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: iz formule za popolno verjetnost dobimo

$$\begin{aligned}
P(Y = l) &= P(X = l+1)\, P(Y = l | X = l+1) \\
&\qquad + P(X = l-1)\, P(Y = l | X = l-1) \\
&= P(X = l+1) \cdot \frac{l+1}{n} + P(X = l-1) \cdot \frac{n-l+1}{n} \\
&= \binom{n}{l+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{l+1}{n} + \binom{n}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n-l+1}{n} \\
&= \binom{n-1}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n-1}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Uporabili smo Pascalovo identiteto. Račun je pravilen za vse $l \in \mathbb{Z}$, *če* $\binom{n}{m}$ *za* $m > n$ *in* $m < 0$ *interpretiramo kot* 0. *Torej je tudi* $Y \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: velja $E(X) = E(Y) = n/2$. *Za kovarianco potrebujemo še* $E(XY)$. *Velja*

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=0}^{n} \Big(k(k+1)\, P(X = k, Y = k+1) \\
&\qquad + k(k-1)\, P(X = k, Y = k-1) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(k(k+1)\, P(X = k)\, \frac{n-k}{n} + k(k-1)\, P(X = k)\, \frac{k}{n} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, P(X = k) \cdot \big((k+1)(n-k) + (k-1)k \big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, P(X = k) \cdot \big((n-2)k - n \big) \\
&= \frac{1}{n} \big((n-2)\, E(X^2) - n\, E(X) \big) .
\end{aligned}$$

Iz $\operatorname{var}(X) = n/4$ *dobimo* $E(X^2) = (n^2 + n)/4$, *torej je*

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{1}{n}\left((n-2)\,\frac{n^2+n}{4} - n\,\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n^2-3n-2}{4}\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z isto porazdelitvijo. Za $k \geq 1$ naj velja

$$P(X = k) = \tfrac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)\,.$$

Naj bo G rodovna funkcija teh dveh slučajnih spremenljivk.

a. (10) Poiščite enačbo, ki ji zadošča ta rodovna funkcija.

Rešitev: obe strani dane relacije pomnožimo z s^k in seštejemo po $k \geq 1$. Če označimo še $P(X = 0) = p$, za levo stran dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\, s^k = G_X(s) - p\,,$$

za desno stran pa dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)\, s^k = \frac{s}{4}\, G_{X+Y}(s)\,.$$

Ker imata X in Y isto porazdelitev, je $G_{X+Y}(s) = G(s)^2$. Iskana enačba je tako

$$G(s) - p = \frac{s}{4}\, G(s)^2\,.$$

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Namig: upoštevajte, da je $G(1) = 1$, in uporabite Newtonov razvoj:

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k\,; \quad |x| < 1\,.$$

Rešitev: če v enačbo iz prve točke vstavimo $G(1) = 1$, dobimo $p = \frac{3}{4}$. Zdaj pa to vstavimo v zvezo in jo rešimo za splošni s:

$$G(s) = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3s}{4}}\right)}{s}\,.$$

Ker morajo biti koeficienti v razvoju nenegativni in ker je $(-1)^k \binom{1/2}{k} < 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$, je pravilna izbira negativni predznak korena. Razvoj v potenčno vrsto nam tako da

$$G(s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} \frac{3^k s^{k-1}}{4^k}$$

in končno

$$P(X = k) = 2(-1)^k \binom{1/2}{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\,.$$

6. (20) V zaporedju neodvisnih metov poštenega kovanca naj bo X število metov do prve pojavitve vzorca GG, Y pa naj bo število metov do druge pojavitve tega vzorca. Primera:

$$\begin{array}{ll} \text{GŠŠGGŠŠŠGŠGG} & X=5, \quad Y=12 \\ \text{GŠŠGŠŠGŠŠGGG} & X=11, \quad Y=12 \end{array}$$

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: definirajmo dogodke $B_1 = \{\textit{prvi met je } \check{S}\}$, $B_2 = \{\textit{prva dva meta sta } G\check{S}\}$ *in* $B_3 = \{\textit{prva dva meta sta } GG\}$. *Velja*

$$E(X|B_1) = 1 + E(X)\,, \quad E(X|B_2) = 2 + E(X) \quad \textit{in} \quad E(X|B_3) = 2\,.$$

Formula za popolno pričakovano vrednost nam da

$$E(X) = \tfrac{1}{2}\big(1 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4}\big(2 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4} \cdot 2\,.$$

Rešimo linearno enačbo in dobimo $E(X) = 6$.

b. (10) Izračunajte $E(Y)$.

Namig: najprej izračunajte $E(Y - X)$.

Rešitev: za $k = 2, 3, \dots$ *definiramo*

$$B_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je } G\}$$

in

$$C_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je } \check{S}\}\,.$$

Velja

$$E(Y - X|B_k) = 1 \quad \textit{in} \quad E(Y - X|C_k) = 1 + E(X)\,.$$

Dogodki $B_2, B_3, \dots, C_2, C_3, \dots$ *tvorijo particijo in formula za popolno pričakovano vrednost nam da*

$$E(Y - X) = \sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \big(1 + E(X)\big) P(C_k)\,.$$

Ker je $P(B_k) = P(C_k)$ *in ker ti dogodki tvorijo particijo, je* $\sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=2}^{\infty} P(C_k) = \frac{1}{2}$. *Sledi*

$$E(Y - X) = 1 + \tfrac{1}{2} E(X) = 4$$

in končno $E(Y) = 10$.