Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

26. januar 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Vržemo tri kovance. Privzemimo, da so meti med seboj neodvisni, verjetnosti, da pade grb, pa niso nujno enake. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih.

a. (10) Recimo, da so vsi trije kovanci pošteni, da je torej verjetnost za grb za vse kovance enaka $p = 1/2$. Sta dogodka A in B neodvisna?

   Rešitev: glej rešitev za b.

b. (10) Recimo, da je prvi kovanec pošten, druga dva pa ne: na vsakem od njiju se grb pojavi z verjetnostjo $p \neq 1/2$. Pri katerih p sta A in B neodvisna?

   Rešitev: velja:

$$\begin{aligned} P(A) &= \tfrac{1}{2} \\ P(B) &= p(1-p) + \tfrac{1}{2}p^2 = p - \tfrac{1}{2}p^2 \\ P(A \cap B) &= p(1-p) \end{aligned}$$

   Če naj bosta dogodka A in B neodvisna, mora veljati $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, torej:

$$\begin{aligned} p - p^2 &= \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}p^2 \\ \tfrac{3}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p &= 0 \\ p(3p-2) &= 0 \end{aligned}$$

   Dogodka sta torej neodvisna le pri $p = 0$ in $p = \frac{2}{3}$.

2. (20) Zakoncema Lovru in Sanji začne piskati pečica. Lovro ustavlja piskanje po lihih, Sanja pa po sodih piskih. Vsakič, ko število piskov doseže sodo število, Sanja ustavi piskanje z verjetnostjo $1/3$. Lovro pa vsakič, ko število piskov doseže število $2k-1$, ustavi piskanje z verjetnostjo $1/(k+3)$. Privzamemo, da zakonca pečico ustavljata neodvisno. Naj bo X število piskov.

a. (10) Za vse $n = 1, 2, 3, \ldots$ izračunajte $P(X > n)$.

Rešitev: dogodek $\{X > n\}$ pomeni, da do vključno n-tega piska pečice ni ustavil nobeden od zakoncev. Če je $n = 2k-1$ lih, je

$$P(X > n) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{k+2}{k+3} = \frac{3}{k+3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},$$

če je $n = 2k$ sod, pa je

$$P(X > n) = \frac{3}{k+3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k}.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Pomoč: za $-1 < x \le 1$ velja $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

Rešitev: iz

$$X = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(X > n)$$

dobimo

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(X > n) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X > 2k-1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X > 2k) \\
&= 1 + \left(1 + \frac{2}{3}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k+3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
&= 1 + 5 \sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-4} \\
&= 1 + \frac{405}{16} \sum_{j=4}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \\
&= 1 + \frac{405}{16} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{8}{81}\right] \\
&= \frac{405}{16} \ln 3 - 24 \\
&\doteq 3{,}81\,.
\end{aligned}$$

3. (20) Naj bodo X, Y in Z neodvisne standardne normalne slučajne spremenljivke.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $W = \sqrt{(X-Y)^2 + 2Z^2}$.

Namig: za slučajno spremenljivko T, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, velja

$$T^2 \sim \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Rešitev: razlika $X - Y$ je neodvisna od $Z\sqrt{2}$. Obe slučajni spremenljivki sta porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(0, 2)$, torej sta njuna kvadrata neodvisna in imata porazdelitev $\Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)$. Njuna vsota $S := (X-Y)^2 + 2Z^2$ pa ima porazdelitev $\Gamma\left(1, \tfrac{1}{4}\right) = \exp\left(\tfrac{1}{4}\right)$. Porazdelitev želene slučajne spremenljivke $W = \sqrt{S}$ lahko dobimo po transformacijski formuli: za $w > 0$ velja

$$f_W(w) = 2w\, f_S(w^2) = \frac{w}{2}\, e^{-\frac{w^2}{4}},$$

medtem ko lahko za $w \le 0$ postavimo $f_W(w) = 0$. To pa lahko dobimo tudi iz kumulativne porazdelitvene funkcije: za $w \ge 0$ velja

$$F_W(w) = P(W \le w) = P\left(S \le w^2\right) = 1 - e^{-\frac{w^2}{4}}$$

in z odvajanjem za $w > 0$ dobimo natančno gostoto f_W.

b. (5) Pokažite, da so $X + Y$, $X - Y$ in Z neodvisne.

Rešitev: pokažimo najprej neodvisnost slučajnih spremenljivk $Q := X + Y$ in $R := X - Y$. Preslikava

$$\Phi(x, y) := (x + y, x - y)$$

bijektivno preslika ravnino $\mathbb{R}^2$ samo vase, je parcialno zvezno odvedljiva in ima inverz

$$\Phi^{-1}(q, r) = \left(\frac{q + r}{2}, \frac{q - r}{2}\right),$$

ki je prav tako parcialno zvezno odvedljiv z $J_{\Phi^{-1}} = \frac{1}{2}$. Slučajni vektor (Q, R) je torej porazdeljen zvezno z gostoto

$$f_{Q,R}(q, r) = \frac{1}{2}\, f_X\left(\frac{q + r}{2}\right) f_Y\left(\frac{q - r}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{q^2 + r^2}{4}} = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{q^2}{4}}\, e^{-\frac{r^2}{4}},$$

iz katere je razvidno, da sta Q in R neodvisni.

Ker so slučajne spremenljivke X, Y in Z neodvisne, je Z neodvisna od para (X, Y), potem pa je neodvisna tudi od para $(X + Y, X - Y) = (Q, R)$. Sledi, da so $X + Y$, $X - Y$ in Z res neodvisne.

c. (5) Naj bo

$$U = \frac{X + Y + \sqrt{(X - Y)^2 + 2Z^2}}{2} \quad \text{in} \quad V = \frac{X + Y - \sqrt{(X - Y)^2 + 2Z^2}}{2}\,.$$

Izračunajte gostoto slučajnega vektorja (U, V). Pri tem eksplicitno navedite, kje je gostota različna od nič.

Rešitev: velja $(U, V) = \Phi^{-1}(Q, W)$ *in lahko privzamemo, da je* $W > 0$. *Preslikava* Φ^{-1} *množico* $\{(q, w)\ ;\ q \in \mathbb{R},\, w > 0\}$ *bijektivno preslika na množico* $\{(u, v)\ ;\ u, v \in \mathbb{R},\, v > 0\}$. *Izven slednje množice je torej gostota* $f_{U,V}$ *enaka nič, za* $u > v$ *pa z uporabo neodvisnosti iz prejšnje točke po transformacijski formuli dobimo*

$$f_{U,V}(u, v) = 2\, f_Q(u + v)\, f_W(u - v) = \frac{u - v}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,.$$

4. (20) Naj bo σ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za element $k \geq 2$ pravimo, da je *točka dviga* permutacije σ, če je $\sigma(k-1) < \sigma(k)$. Privzemimo zdaj, da permutacijo izberemo povsem naključno, torej da so vse možne permutacije enako verjetne. Naj bo X število točk dviga te slučajne permutacije.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: za $k = 2, 3, \ldots, n$ definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če je } k \textit{ točka dviga} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = I_2 + \cdots + I_n$.

Naj bodo $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ različni indeksi. Slučajno permutacijo σ lahko dobimo tudi tako, da najprej določimo vrstni red slik $\sigma(k_1), \ldots, \sigma(k_r)$, nakar mednje vrinemo $\sigma(k)$ za preostale indekse k. Pri vseh možnih vrstnih redih izbranih slik lahko preostale vrinemo na enako mnogo načinov, zato so vsi možni vrstni redi enako verjetni. Med drugim to pomeni tudi, da sta dogodka $\{\sigma(k-1) < \sigma(k)\}$ in $\{\sigma(k-1) > \sigma(k)\}$ enako verjetna. Verjetnost, da je k točka dviga, je torej enaka $\frac{1}{2}$ in sledi

$$E(X) = \frac{n-1}{2}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev: nastavimo

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{l=2}^{n} \operatorname{cov}(I_k, I_l)\,,$$

nakar ločimo tri primere:

(i) *Če je $k = l$, je $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \operatorname{var}(I_k) = \frac{1}{4}$.*

(ii) *Če je $l = k+1$, najprej izračunamo verjetnost dogodka $\{I_k = 1, I_{k+1} = 1\}$, ki je ekvivalenten dogodku $\{\sigma(k-1) < \sigma(k) < \sigma(k+1)\}$. Iz sklepanja v rešitvi prejšnje točke dobimo, da je verjetnost tega dogodka enaka $\frac{1}{6}$, torej je $\operatorname{cov}(I_k, I_{k+1}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$. Enako velja tudi za $k = l+1$.*

(iii) *Če je $|k - l| > 1$, pa si lahko predstavljamo, da najprej določimo, katera izmed slik $\sigma(k-1)$ in $\sigma(k)$ bo večja ter katera izmed slik $\sigma(l-1)$ in $\sigma(l)$ bo večja. Ne glede na izbiro imamo nato $\binom{4}{2} = 6$ možnosti za vrstni red slik $\sigma(k-1)$, $\sigma(k)$, $\sigma(l-1)$ in $\sigma(l)$, nakar lahko mednje na $5 \cdot 6 \cdots n$ načinov vrinemo preostale slike, spet ne glede na izbiro. Dobimo, da so vse štiri možne kombinacije, katera izmed slik $\sigma(k-1)$ in $\sigma(k)$ oziroma $\sigma(l-1)$ in $\sigma(l)$ bo večja, enako verjetne. Sledi, da sta dogodka $\{I_k = 1\}$ in $\{I_l = 1\}$ neodvisna, z njima pa tudi slučajni spremenljivki I_k in I_l. Torej je $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = 0$.*

Seštejemo in dobimo

$$\operatorname{var}(X) = \frac{n-1}{4} - \frac{2(n-2)}{12} = \frac{n+1}{12}\,.$$

5. (20) Naj bo $\alpha, \beta > 0$. Za porazdelitev slučajne spremenljivke N, dano s

$$P(N = k) = \frac{(\alpha)_k \beta^\alpha}{k! \cdot (1+\beta)^{\alpha+k}}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$, je

$$G_N(s) = \left(\frac{\beta}{1+\beta-s}\right)^\alpha .$$

Pri tem je $(\alpha)_k$ *Pochhammerjev simbol*, definiran z $(\alpha)_0 = 1$ in $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $I_1 \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, ki so neodvisne tako med seboj kot tudi od N.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne vsote $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N$: za vse $k = 0, 1, 2, \ldots$ izračunajte $P(X = k)$.

Rešitev: po formuli je

$$G_X(s) = G_N(G_{I_1}(s)) .$$

Vstavimo $G_{I_1}(s) = 1 - p + ps$ *in dobimo*

$$G_X(s) = \left(\frac{\beta}{1+\beta-1+p-ps}\right)^\alpha .$$

Izraz nekoliko predelamo v

$$G_X(s) = \left(\frac{\beta/p}{1+\beta/p-s}\right)^\alpha .$$

Za $k = 0, 1, 2, \ldots$ *je torej*

$$P(X = k) = \frac{(\alpha)_k (\beta/p)^\alpha}{k! \cdot (1+\beta/p)^{\alpha+k}} = \frac{(\alpha)_k \beta^\alpha p^k}{k! \cdot (p+\beta)^{\alpha+k}} .$$

Celotna izpeljava je sicer veljavna le za $p > 0$, *a ob dogovoru* $0^0 = 1$ *je zadnja oblika pravilna tudi za* $p = 0$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: vemo, da je

$$\mathrm{var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 .$$

Računamo

$$G'_X(s) = \alpha(\beta/p)^\alpha \left(\frac{1}{1+\beta/p-s}\right)^{\alpha+1}$$

in

$$G''(s) = \alpha(\alpha+1)(\beta/p)^\alpha \left(\frac{1}{1+\beta/p-s}\right)^{\alpha+2} .$$

Vstavimo $s = 1$ *in dobimo*

$$G'_X(1) = \frac{\alpha p}{\beta} \quad \textit{in} \quad G''_X(1) = \frac{\alpha(\alpha+1)p^2}{\beta^2} .$$

Sledi

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)p^2}{\beta^2} + \frac{\alpha p}{\beta} - \frac{\alpha^2 p^2}{\beta^2}\,.$$

Poenostavimo in dobimo

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\alpha p}{\beta}\left(\frac{p}{\beta} + 1\right)\,.$$

Celotna izpeljava je sicer spet veljavna le za $p > 0$*, a rezultat velja tudi za* $p = 0$.

6. (20) Privzemimo, da r kroglic razmestimo v n škatel, tako da škatle med seboj ločimo, kroglic pa ne, kot postulira *Bose–Einsteinova porazdelitev* iz statistične fizike. Z drugimi besedami, naključno izbiramo nabor n števil $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, za katerega je $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ in $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$; k_i predstavlja število kroglic v i-ti škatli. Vsak nabor izberemo z isto verjetnostjo

$$\frac{1}{\binom{n+r-1}{n-1}}\,.$$

a. (15) Za $k = 0, 1, 2, \ldots, r$ naj bo N_k slučajno število škatel, v katerih je natanko k kroglic. Za vse možne nabore $(n_0, \ldots, n_r)$ izračunajte

$$P(N_0 = n_0, \ldots, N_r = n_r)\,.$$

Kateri pa so možni nabori?

Rešitev: Možni nabori so tisti, pri katerih je:

- $n_0, n_1, \ldots, n_r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;
- $n_0 + n_1 + \cdots + n_r = n$;
- $n_1 + 2n_2 + \cdots + rn_r = r$.

Števila kroglic v posameznih škatlah si lahko predstavljamo kot njihove oznake, torej je ekvivalentno reči, da med škatle razporedimo $r + 1$ oznak, in sicer n_0 oznak 0, n_1 oznak 1 itd. Število razporeditev oznak s takimi zastopanostmi je

$$\frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!}\,,$$

torej je:

$$\begin{aligned} P(N_0 = n_0, \ldots, N_r = n_r) &= \frac{1}{\binom{n+r-1}{n-1}} \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!\,n!}{(n-r+1)!\,n_0!\,n_1!\cdots n_r!}\,. \end{aligned}$$

b. (5) Izračunajte porazdelitev slučajnega vektorja $(N_1, \ldots, N_r)$.

Rešitev: Opazimo, da je z vrednostjo slučajnega vektorja $(N_1, \ldots, N_r)$ določena tudi slučajna spremenljivka N_0, saj je $N_0 + N_1 + \cdots + N_r = N$. Tako iz prejšnje točke dobimo

$$P(N_1 = n_1, \ldots, N_r = n_r) = \frac{r!\,(n-1)!\,n!}{(n-r+1)!\,(n-n_1-n_2-\cdots-n_r)!\,n_1!\,n_2!\cdots n_r!}\,,$$

če je $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $n_1+n_2+\cdots+n_r \leq n$ in $n_1+2n_2+\cdots+rn_r = r$; sicer je $P(N_1 = n_1, \ldots, N_r = n_r) = 0$.