Ime in priimek: ______________________ Vpsina št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

26. januar 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.					
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Naj bosta A in B dogodka, za katera je:

$$P(A \mid B) = p\,, \qquad P(B \mid A) = q\,, \qquad P(B \mid A^c) = r\,.$$

Privzemimo, da imajo vsi dogodki $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ in $A^c \cap B^c$ strogo pozitivne verjetnosti.

a. (10) Določite razmerja med verjetnostmi dogodkov $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ in $A^c \cap B^c$.

Rešitev: velja

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A^c \cap B)} = \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(B)\,P(A^c \mid B)} = \frac{P(A \mid B)}{1 - P(A \mid B)} = \frac{p}{1-p}\,.$$

Podobno je še

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B^c)} = \frac{q}{1-q} \qquad \textit{in} \qquad \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c \cap B^c)} = \frac{r}{1-r}\,.$$

Povzamemo v

$$P(A \cap B) : P(A \cap B^c) : P(A^c \cap B) : P(A^c \cap B^c) = 1 : \frac{1-q}{q} : \frac{1-p}{p} : \frac{1-p}{p}\,\frac{1-r}{r}$$

ali ekvivalentno

$$\begin{aligned} &P(A \cap B) : P(A \cap B^c) : P(A^c \cap B) : P(A^c \cap B^c) \\ &\qquad = pqr : (1-q)pr : (1-p)qr : (1-p)q(1-r)\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $P(A)$ in $P(B)$.

Rešitev: ob upoštevanju, da je $P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) = 1$, *najprej izračunamo:*

$$pqr + (1-q)pr + (1-p)qr + (1-p)q(1-r) = pr + q - pq$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{pqr}{pr + q - pq}\,, \\ P(A \cap B^c) &= \frac{(1-q)pr}{pr + q - pq}\,, \\ P(A^c \cap B) &= \frac{(1-p)qr}{pr + q - pq}\,, \\ P(A^c \cap B^c) &= \frac{(1-p)q(1-r)}{pr + q - pq}\,. \end{aligned}$$

Končno je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{pr}{pr + q - pq}\,, \\ P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{qr}{pr + q - pq}\,. \end{aligned}$$

2. (20) Galois and Duchatelet si napovesta dvoboj. Izmenoma bosta streljala drug na drugega, dokler eden od njiju ne omahne. Privzamemo, da so streli neodvisni ter da Galois zadene z verjetnostjo a, Duchatelet pa z verjetnostjo b. Naj bo X število vseh strelov vključno s smrtonosnim, če prvi strelja Galois, Y pa število strelov, če začne Duchatelet.

a. (5) Poiščite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: v primeru, da začne streljati Galois, dobimo

$$\begin{aligned} P(X = 2m-1) &= (1-a)^{m-1}(1-b)^{m-1}a\,, \\ P(X = 2m) &= (1-a)^{m}(1-b)^{m-1}b\,. \end{aligned}$$

V primeru, da začne Duchatelet, a in b zamenjata vlogi.

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da zmaga Galois, če je on tisti, ki začne streljati?

Rešitev: iz prvega dela naloge sledi, da je

$$P(\textit{zmaga Galois}) = \sum_{m=1}^{\infty}(1-a)^{m-1}(1-b)^{m-1}a\,.$$

Seštejemo in sledi

$$P(\textit{zmaga Galois}) = \frac{a}{a+b-ab}\,.$$

c. (5) Utemeljite, da velja

$$E(X) = 1 + (1-a)E(Y) \quad \text{in} \quad E(Y) = 1 + (1-b)E(X)\,.$$

Rešitev: privzemimo, da začne streljati Galois. Označimo s H dogodek, da zadene s prvim strelom. Velja

$$E(X) = E(X \mid H)\,P(H) + E(X \mid H^c)\,P(H^c)\,.$$

Nadalje je $E(X \mid H) = 1$ in $E(X \mid H^c) = 1 + E(Y)$, saj se zaradi neodvisnosti strelov igra začne na novo, pri čemer začne Duchatelet. Enako sledi druga enačba.

d. (5) Izračunajte $E(X)$ in $E(Y)$.

Rešitev: ko rešimo enačbi iz prejšnje točke, dobimo

$$E(X) = \frac{2-a}{a+b-ab} \quad \textit{in} \quad E(Y) = \frac{2-b}{a+b-ab}\,.$$

3. (20) Naj bodo $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\xi_0 \sim \exp(1)$. Za $j \geq 1$ definirajmo

$$T_j := \frac{\sum_{i=1}^{j} \xi_i}{\xi_0}\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja $\big(\xi_0, T_{j-1}, T_j\big)$.

Namig: Gostota slučajnega vektorja $\big(\xi_0, \xi_0 T_{j-1}, \xi_j\big)$*? Spomnite se, da ima* $\sum_{i=1}^{k} \xi_i$ *porazdelitev gama.*

Rešitev: Gostota slučajnega vektorja $\big(\xi_0, \xi_0 T_{j-1}, \xi_j\big)$ *je zaradi neodvisnosti za* $j \geq 2$ *enaka*

$$f(x,t,s) = e^{-x} \cdot \frac{1}{(j-2)!}\, t^{j-2} e^{-t}\, e^{-s}$$

z običajno interpretacijo $0! = 1$*. Transformacija*

$$\Phi\colon\ (x,t,s) \mapsto \left(x,\ \frac{t}{x},\ \frac{t+s}{x}\right)$$

je parcialno zvezno odvedljiva in množico $(0,\infty)^3$ *bijektivno preslika na področje* $G = \{(u,v,w)\ ;\ u > 0, w > v > 0\}$*, njen inverz pa je enak*

$$\Phi^{-1}(u,v,w) = \big(u, uv, u(w-v)\big)$$

in ima Jacobijevo determinanto

$$J_{\phi^{-1}}(u,v,w) = u^2\,.$$

Označimo iskano gostoto z g*. Dobimo*

$$\begin{aligned} g(u,v,w) &= e^{-u} \cdot \frac{1}{(j-2)!}\,(uv)^{j-2}\, e^{-uv}\, e^{-u(w-v)} u^2 \\ &= \frac{1}{(j-2)!}\, u^j v^{j-2}\, e^{-u(1+w)}\,. \end{aligned}$$

Seveda formula velja samo na G*, sicer je gostota enaka* 0*.*

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke T_j.

Rešitev: Za $w > 0$ *izračunamo*

$$\begin{aligned} f_{T_j}(w) &= \frac{1}{(j-2)!} \int_{\substack{u>0 \\ w>v>0}} u^j v^{j-2}\, e^{-u(1+w)}\, du\, dv \\ &= \frac{1}{(j-2)!} \int_0^\infty u^j\, e^{-u(1+w)}\, du \int_0^w v^{j-2}\, dv \\ &= \frac{1}{(j-2)!} \cdot \frac{j!}{(1+w)^{j+1}} \cdot \frac{w^{j-1}}{j-1} \\ &= \frac{j\, w^{j-1}}{(1+w)^{j+1}}\,, \end{aligned}$$

medtem ko lahko za $w \leq 0$ *postavimo* $f_{T_j}(w) = 0$*.*

4. (20) Tri kobilice sedijo vsaka v svojem oglišču enakostraničnega trikotnika. Tik pred trenutki $n = 1, 2, \ldots$ se vsaka odloči, da skoči v eno od sosednjih oglišč. Vsako od oglišč izbere z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, neodvisno od ostalih dveh in neodvisno od prejšnjega dogajanja. Nekoč se bodo vse kobilice srečale v enem od oglišč. Naj bo X trenutek, ko se to zgodi.

a. (10) Vzemimo alternativni začetek, ko najprej dve kobilici sedita v istem oglišču, ena pa v svojem; v nadaljevanju se obnašajo enako kot prej. Naj bo Y trenutek, v katerem se v tem primeru srečajo v enem od oglišč. Poiščite vsaj eno netrivialno zvezo med $E(X)$ in $E(Y)$.

Rešitev: po prvem koraku se lahko zgodi dvoje:

(i) Vse kobilice so še vedno vsaka v svojem oglišču. *To se lahko zgodi na dva od osmih enako verjetnih načinov, torej z verjetnostjo* $\frac{1}{4}$.

(ii) Dve kobilici sta v istem oglišču, ena pa v svojem. *Verjetnost te možnosti je* $\frac{3}{4}$.

Ker se dogajanje po vsaki izbiri začne na novo, formula za popolno pričakovano vrednost da

$$E(X) = \tfrac{1}{4}\big(1 + E(X)\big) + \tfrac{3}{4}\big(1 + E(Y)\big)$$

oziroma

$$3E(X) - 3E(Y) = 4\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$ in $E(Y)$.

Rešitev: naredimo enak razmislek s pogojevanjem za Y. *Po prvem skoku se lahko kobilice srečajo v istem oglišču, lahko sta dve v istem in ena v drugem, lahko pa je vsaka v svojem. Po vrsti so verjetnosti* $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$ *in* $\frac{2}{8}$. *Sledi*

$$E(Y) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{8}\big(1 + E(Y)\big) + \tfrac{1}{4}\big(1 + E(X)\big)\,.$$

oziroma

$$2E(X) - 3E(Y) = -8\,.$$

Ko prikličemo enačbo iz prejšnje točke in rešimo dobljeni sistem enačb za $E(X)$ *in* $E(Y)$, *dobimo* $E(X) = 12$ *in* $E(Y) = \frac{32}{3}$.

5. (20) Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka.

a. (10) Pokažite, da za $s \in (-1, 1)$ velja

$$E\big[s^X\big] = 1 - (1-s) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\, s^{k-1}\,.$$

Rešitev: začnemo z desno stranjo:

$$\begin{aligned}
&1 - (1-s) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\, s^{k-1} \\
&\quad = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\, s^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\, s^{k} \\
&\quad = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(X \geq k+1)\, s^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)\, s^{k} \\
&\quad = 1 - P(X \geq 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(P(X \geq k) - P(X \geq k+1)\Big)\, s^{k} \\
&\quad = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\, s^{k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)\, s^{k} \\
&\quad = E\big[s^X\big]\,.
\end{aligned}$$

b. (5) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja. Rodovna funkcija števila potomcev posameznega predstavnika naj bo $G(s) = 1 - p(1-s)^\beta$, kjer sta $0 < p < 1$ in $0 < \beta < 1$ parametra procesa. Za $n \geq 1$ izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n, ki označuje število predstavnikov n-te generacije procesa.

Rešitev: rodovna funkcija slučajne spremenljivke Z_n je

$$G_n(s) = \underbrace{G(G(\cdots G}_{n}(s)\cdots))\,.$$

Potem ko izračunamo:

$$\begin{aligned}
G_2(s) &= G\big(G(s)\big) = 1 - p\big(p(1-s)^\beta\big)^\beta = 1 - p^{1+\beta}(1-s)^{\beta^2}\,, \\
G_3(s) &= G_2\big(G(s)\big) = 1 - p^{1+\beta}\big(p(1-s)^\beta\big)^{\beta^2} = 1 - p^{1+\beta+\beta^2}(1-s)^{\beta^3}\,,
\end{aligned}$$

postavimo domnevo, da je

$$G_n(s) = 1 - p^{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}}(1-s)^{\beta^n}\,,$$

ki jo dokažemo z indukcijo: za $n = 1$ je očitno, indukcijski korak z n na $n+1$ pa lahko naredimo tako, da izračunamo

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= G_n\big(G(s)\big) \\ &= 1 - p^{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}}\big(p(1-s)^\beta\big)^{\beta^n} \\ &= 1 - p^{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}+\beta^n}(1-s)^{\beta^{n+1}} \end{aligned}$$

(pri drugem enačaju smo uporabili indukcijsko predpostavko).

c. (5) Za $k \geq 1$ izračunajte $P(Z_n \geq k)$.

Rešitev: označimo $a_n = p^{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}}$, $b_n = \beta^n$ in izračunamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} P(Z_n \geq k) &= a_n (1-s)^{b_n - 1} \\ &= a_n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b_n - 1}{k} (-s)^k \\ &= a_n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{b_n - 1}{k-1} (-s)^{k-1}, \end{aligned}$$

od koder razberemo, da za $k = 1, 2, \ldots$ velja

$$\begin{aligned} P(Z_n \geq k) &= (-1)^{k-1} a_n \binom{b_n - 1}{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} a_n \frac{(b_n - 1)(b_n - 2)\cdots(b_n - k + 1)}{(k-1)!} \\ &= a_n \frac{(1 - b_n)(2 - b_n)\cdots(k - 1 - b_n)}{(k-1)!} \\ &= \frac{a_n (1 - b_n)_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= a_n \binom{k - 1 - b_n}{k-1}. \end{aligned}$$

V predzadnjem izrazu nastopa Pochhammerjev simbol $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

6. (20) Pozitivne celoštevilske slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kjer je $n \geq 2$, naj imajo porazdelitev dano s predpisom

$$P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\big) = \frac{(k_n - 1)!}{(k_1 - 1)!} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

za $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$.

a. (10) Izračunajte

$$P\big(X_n = k_n \bigm| X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) .$$

Namig: upoštevajte, da za poljubna $m \in \mathbb{Z}$ in $j = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$\frac{(m + j - 1)!}{j!} = (m - 1)!\,(-1)^j \binom{-m}{j}$$

ter se spomnite na Newtonovo binomsko formulo.

Rešitev:

Prvi način: *najprej izračunamo robne verjetnosti* $P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big)$. *Po formuli za robne porazdelitve so le-te enake vsotam*

$$\sum_{k_n = k_{n-1}}^{\infty} P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\big) .$$

Prepišemo v

$$\begin{aligned}
&P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) \\
&\quad = \frac{1}{(k_1 - 1)!} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \sum_{k_n = k_{n-1}}^{\infty} \frac{(k_n - 1)!}{(k_n - k_{n-1})!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + \cdots + k_n} \\
&\quad = \frac{1}{(k_1 - 1)!} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + \cdots + k_{n-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k_{n-1} + j - 1)!}{j!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{n-1} + j} \\
&\quad = \frac{(k_{n-1} - 1)!}{(k_1 - 1)!} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + \cdots + k_{n-2} + 2k_{n-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k_{n-1}}{j} \left(-\frac{1}{2}\right)^j
\end{aligned}$$

Po Newtonovi formuli je nadalje

$$\begin{aligned}
&P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) \\
&\quad = \frac{(k_{n-1} - 1)!}{(k_1 - 1)!} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + \cdots + k_{n-2} + 2k_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-k_{n-1}} \\
&\quad = \frac{(k_{n-1} - 1)!}{(k_1 - 1)!} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(k_{i+1} - k_i)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1 + \cdots + k_{n-1}} .
\end{aligned}$$

Z deljenjem sledi

$$P\big(X_n = k_n \mid X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) = \binom{k_n - 1}{k_{n-1} - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} .$$

Z drugimi besedami, pogojna porazdelitev je negativna binomska $\mathrm{NegBin}\big(k_{n-1}, \frac{1}{2}\big)$.

Drugi način: *pokažimo, da ima slučajni vektor* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *dano porazdelitev, če je* X_i *število predstavnikov* i*-te generacije v procesu razvejanja, v katerem je število neposrednih potomcev vsakega posameznika porazdeljeno geometrijsko* $\mathrm{Geom}\big(\frac{1}{2}\big)$*, torej je verjetnost, da ima posameznik natanko* k *neposrednih potomcev, enaka* $\big(\frac{1}{2}\big)^k$*. Zamislimo si namreč drevo do vključno* n*-te generacije, v katerem ima vsak posameznik, ki ni iz zadnje generacije, vsaj enega neposrednega potomca in v katerem neposredne potomce vsakega posameznika uredimo po velikosti. Verjetnost, da se proces razvejanja do vključno* n*-te generacije razvija skladno s tem drevesom, je enaka* $\big(\frac{1}{2}\big)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}$*, kjer je* k_i *število predstavnikov* i*-te generacije; pri tem je seveda* $1 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$.

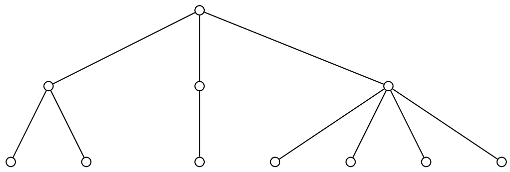
Zdaj moramo samo še prešteti vsa taka drevesa. Za ta namen vrstne rede neposrednih potomcev najprej združimo v enoten vrstni red vseh vozlišč drevesa oziroma predstavnikov procesa do vključno n*-te generacije na naslednji način:*

(i) *Ohrani se vrstni red njegovih neposrednih potomcev posameznika.*

(ii) *Vsi njegovi neposredni potomci nastopijo za njim.*

(iii) *Če ima* Y *istega neposrednega prednika in prvotno nastopi za* X*, nastopi tudi za vsemi* X*-ovimi potomci.*

Ni težko preveriti, da se da to narediti na en sam način. Nato drevesu priredimo kodo, ki jo sestavljajo števila od 1 *do* n*, in sicer tako, da potomce naštejemo po vrstnem redu in vsakič, ko predstavnik ni neposredni potomec prejšnjega, dodamo številko generacije, ki ji pripada. Koda je lahko tudi prazna: to se zgodi natanko tedaj, ko ima vsaka generacija natanko enega predstavnika oziroma tedaj, ko ima vsak predstavnik generacije, ki ni zadnja, natanko enega potomca. Drevo lahko iz kode enolično rekonstruiramo, in sicer tako, da začnemo z ustanoviteljem procesa in linijo prvih potomcev do vključno zadnje generacije, nato pa pri vsaki številki* i*, ki se pojavi v kodi, poiščemo zadnjega predstavnika* $(i-1)$*-te generacije, ki je že v drevesu, in mu dodamo novega potomca skupaj z linijo prvih potomcev do vključno zadnje generacije. Vrstni red predstavnikov dobljenega drevesa se ujema z vrstnim redom dodajanja. Tako ima recimo drevo*



kodo $2, 1, 1, 2, 2, 2$.

Če ima proces za $i = 0, 2, \ldots, n$ *natanko* k_i *predstavnikov* i*-te generacije (torej* $k_0 = 1$*) se v kodi za* $i = 1, 2, \ldots, n$ *pojavi natanko* $k_i - k_{i-1}$ *številk* i*, dolžina kode* *pa je* $k_n - 1$. *Vseh kod oziroma dreves, za katere to velja, je torej*

$$\frac{(k_n-1)!}{(k_1-1)!\,(k_2-k_1)!\,(k_3-k_2)!\cdots(k_n-k_{n-1})!} = \frac{1}{(k_1-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{n-2}\frac{1}{(k_{i+1}-k_i)!}\,,$$

od koder dobimo, da ima slučajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *res dano porazdelitev.*

Robno porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ *dobimo tako, da proces razvejanja gledamo le do vključno* $(n-1)$*-te generacije. Sledi, da mora biti enake oblike kot prvotna porazdelitev, le da* n *zamenjamo z* $n-1$*. Tako smo dobili tudi pri prvem načinu. A za pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke* X_n *glede na* $\{X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\}$ *zdaj ni treba deliti izrazov, temveč preprosto upoštevamo, da gre za vsoto* k_{n-1} *neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih geometrijsko* $\mathrm{Geom}\big(\frac{1}{2}\big)$*, za slednjo pa vemo, da ima negativno binomsko porazdelitev* $\mathrm{NegBin}\big(k_{n-1}, \frac{1}{2}\big)$*.*

b. (10) Pokažite, da za $s_i \in (0,1)$ in $i = 1, 2, \ldots, n$ velja

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n-1} s_i^{X_i}\cdot\left(\frac{s_n}{2-s_n}\right)^{X_{n-1}}\right).$$

Rešitev: iz pogojne porazdelitve v prvi točki in znane rodovne funkcije za negativno binomsko porazdelitev sledi

$$E\left(s_n^{X_n}\;\middle|\; X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\right) = \left(\frac{s_n}{2-s_n}\right)^{k_{n-1}}.$$

Po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right) &= \sum_{1\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_{n-1}} E\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\;\middle|\; X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\right) \\
&\qquad\qquad\times P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) \\
&= \sum_{1\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} s_i^{k_i}\cdot E\left(s_n^{X_n}\;\middle|\; X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\right) \\
&\qquad\qquad\times P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) \\
&= \sum_{1\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} s_i^{k_i}\cdot\left(\frac{s_n}{2-s_n}\right)^{k_{n-1}} \\
&\qquad\qquad\times P\big(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}\big) \\
&= E\left(\prod_{i=1}^{n-1} s_i^{X_i}\cdot\left(\frac{s_n}{2-s_n}\right)^{X_{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Opomba. *Dobljeno formulo lahko prepišemo v obliki*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n-2} s_i^{X_i}\cdot\left(\frac{s_{n-1}s_n}{2-s_n}\right)^{X_{n-1}}\right).$$

To pa je rekurzivna formula, ki jo lahko iteriramo. Iteracija prevede skupno rodovno funkcijo na rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_1. *Če jo označimo z* G_1, *je torej* $E\left(\prod_{i=1}^n s_i^{X_i}\right)$ *funkcija* G_1, *uporabljena na neki racionalni funkciji spremenljivk* $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Funkcijo G_1 *pa tudi poznamo: iz drugega načina rešitve točke a. ali z iteriranjem formule za robno porazdelitev dobimo, da je* X_1 *porazdeljena geometrijsko* $\mathrm{Geom}(1/2)$, *torej*

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

za $k \geq 1$, *rodovna funkcija pa je*

$$G_1(s) = \frac{s}{2 - s}\,.$$