FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

18. 6. 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Pri igri *Bingo75* dobi igralec kartico s 25 različnimi števili med 1 in 75 kot na spodnji sliki. Na kartici sta označena vzorca *Diagonala* s petimi polji. V igri potem naključno izberejo 50 števil med 1 in 75, tako da so vsi nabori 50 števil enako verjetni. Igralec dobi izplačilo, če so izbrana vsa števila na vsaj eni Diagonali.

16	10	72	75	2
50	39	34	42	47
48	5	43	40	44
32	57	3	62	4
73	30	19	65	21

16	10	72	75	2
50	39	34	42	47
48	5	43	40	44
32	57	3	62	4
73	30	19	65	21

Slika 1: kartica, ki jo dobi igralec, z označenima diagonalama.

a. (10) Z binomskim simboli izrazite verjetnost, da igralec dobi izplačilo.

Rešitev: označimo z A dogodek, da so izbrana vsa števila na prvi diagonali, in z B dogodek, da so izbrana vsa števila na drugi diagonali. Velja

$$P(A) = P(B) = \frac{\binom{70}{45}}{\binom{75}{50}} = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{75}{5}} = \frac{50!\,70!}{45!\,75!}\,.$$

Podoben razmislek da

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{66}{41}}{\binom{75}{50}} = \frac{\binom{50}{9}}{\binom{75}{9}} = \frac{50!\,66!}{41!\,75!}\,.$$

Iskana verjetnost je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

b. (10) Manjšo tolažilno nagrado dobi igralec, če je v vsaki vrstici izbrano število z vsaj ene diagonale. Z binomskimi simboli izrazite verjetnost, da se to zgodi.

Rešitev: za $i = 1, 2, 3, 4, 5$ naj bo

$$A_i = \{\textit{v } i\textit{-ti vrstici je izbrano število z vsaj ene diagonale}\}\,.$$

Iščemo verjetnost dogodka $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$. Pri tem se splača pogojevati na A_3, ne pa tudi na ostale dogodke, saj število pokritih polj, ki jih zadevajo, ni fiksno. Pišimo torej

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_3)\, P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \mid A_3)\,.$$

Velja $P(A_3) = 2/3$, pogojno na A_3 pa je aktualnih še 74 števil, med katerimi se jih izbere 49 in vse možne izbire so enako verjetne.

Za dogodke A_1, A_2, A_4 in A_5 velja, da je lažje računati verjetnosti presekov njihovih komplementov kot verjetnosti presekov teh dogodkov samih. Zato uporabimo formulo za vključitve in izključitve (pogojno na A_3). Upoštevajoč simetrijo, dobimo

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \mid A_1) \\
&\qquad = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_4^c \cup A_5^c \mid A_3) \\
&\qquad = 1 - \binom{4}{1} P(A_1^c \mid A_3) + \binom{4}{2} P(A_1^c \cap A_2^c \mid A_3) - \binom{4}{3} P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_4^c \mid A_3) \\
&\qquad\qquad + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_4^c \cap A_5^c \mid A_3)\,.
\end{aligned}$$

Končno je

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_3 \cap A_5) \\
&\qquad = \frac{2}{3}\left[1 - 4\,\frac{\binom{72}{49}}{\binom{74}{49}} + 6\,\frac{\binom{70}{49}}{\binom{74}{49}} - 4\,\frac{\binom{68}{49}}{\binom{74}{49}} + \frac{\binom{66}{49}}{\binom{74}{49}}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{3}\left[1 - 4\,\frac{\binom{25}{2}}{\binom{74}{2}} + 6\,\frac{\binom{25}{4}}{\binom{74}{4}} - 4\,\frac{\binom{25}{6}}{\binom{74}{6}} + \frac{\binom{25}{8}}{\binom{74}{8}}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{3}\Bigg[1 - 4 \cdot \frac{25 \cdot 24}{74 \cdot 73} + 6 \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71} - 4 \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69} \\
&\qquad\qquad + \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67}\Bigg]\,.
\end{aligned}$$

2. (20) Pošten kovanec mečemo, dokler ne padeta dve zaporedni številki. Meti so med seboj neodvisni. Označimo z N število metov.

a. (10) Izrazite verjetnosti $P(N = n)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, s Fibonaccijevim zaporedjem $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Namig: pogojujte na prva dva meta.

Rešitev: Dogodek $\{N = 2\}$ se ujema z dogodkom, da je v prvem in drugem metu padla številka. Dogodek $\{N = 3\}$ pa se ujema z dogodkom, da je v prvem metu padel grb, v drugem in tretjem metu pa številka. Sledi

$$P(N = 2) = \frac{1}{4}\,, \qquad P(N = 3) = \frac{1}{8}\,.$$

Za $n = 3, 4, \ldots$ pa dogodek $\{N = n\}$ razdelimo na dva poddogodka:

- *V prvem metu pade grb, nato pa potrebujemo še natanko $n-1$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*
- *V prvem metu pade številka, v drugem grb, nato pa potrebujemo še natanko $n - 2$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*

Od tod dobimo rekurzivno formulo

$$P(N = n) = \frac{P(N = n - 1)}{2} + \frac{P(N = n - 2)}{4}\,.$$

Zaporedje $a_n := 2^n\, P(N = n)$ torej zadošča rekurzivni zvezi

$$a_2 = a_3 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,$$

od koder dobimo, da je $a_n = F_{n-1}$ oziroma $P(N = n) = \dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

b. (5) Izrazite s Fibonaccijevim zaporedjem še repne verjetnosti $P(N > n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Izraz mora biti sklenjena formula s konstantnim številom računskih operacij.

Namig: rešujte na podoben način kot prejšnjo točko in neodvisno od nje.

Rešitev: Dogodek $\{N > 1\}$ je gotov, dogodek $\{N > 2\}$ pa se ujema z dogodkom, da je prvem in drugem metu nista padli zaporedni številki. Sledi

$$P(N > 1) = 1\,, \qquad P(N > 2) = \frac{3}{4}\,.$$

Za $n = 4, 5, \ldots$ pa dogodek $\{N = n\}$ razdelimo na dva poddogodka:

- *V prvem metu pade grb in v nadaljnjih $n - 1$ metih ne padeta dve zaporedni številki.*

– *V prvem metu pade številka, v drugem grb in v nadaljnjih $n-2$ metih ne padeta dve zaporedni številki.*

Od tod dobimo rekurzivno formulo

$$P(N > n) = \frac{P(N > n-1)}{2} + \frac{P(N > n-2)}{4}\,.$$

Zaporedje $b_n := 2^n\,P(N = n)$ *torej zadošča rekurzivni zvezi*

$$b_1 = 2\,, \qquad b_2 = 3\,, \qquad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\,,$$

od koder dobimo, da je $b_n = F_{n+2}$ *oziroma* $P(N > n) = \dfrac{F_{n+2}}{2^n}$.

c. (5) Izračunajte $E(N)$.

Rešitev:

Prvi način. *Definirajmo naslednje tri hipoteze:*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\textit{v prvem metu pade grb}\}\,.\\ H_2 &= \{\textit{v prvem metu pade številka, v drugem pa grb}\}\,.\\ H_3 &= \{\textit{v prvih dveh metih pade številka}\}\,. \end{aligned}$$

Če se zgodi H_3, *je očitno* $N = 2$ *in torej tudi* $E(N \mid H_3) = 2$. *Če pa se zgodita* H_1 *ali* H_2, *je nadaljnje dogajanje spet zaporedje neodvisnih metov kovanca, zato je* $E(N \mid H_1) = 1 + E(N)$ *in* $E(N \mid H_2) = 2 + E(N)$. *Sledi:*

$$E(N) = \frac{1}{2}\big(1 + E(N)\big) + \frac{1}{4}\big(2 + E(N)\big) + \frac{1}{4}\cdot 2\,,$$

od koder dobimo $E(N) = 6$.

Drugi način. *Uporabimo formulo*

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n)$$

in opazimo, da je $P(N > n) = 8\,P(N = n+3)$ *za vse* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Sledi*

$$E(N) = 8\sum_{n=0}^{\infty} P(N = n+3) = 8\,P(N > 1) = 6\,.$$

3. (20) Naj ima slučajna spremenljivka X Weibullovo gostoto, dano z

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha}$$

za $x > 0$, sicer pa naj bo gostota enaka 0; privzamemo, da je $\alpha, \sigma > 0$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke

$$Y = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^\alpha .$$

Rešitev:

Prvi način: *uporabimo transformacijsko formulo. Funkcija* $\Phi(x) = (x/\sigma)^\alpha$ *poltrak* $(0, \infty)$ *bijektivno preslika samega nase, njen inverz* $\Phi^{-1}(y) = \sigma\, y^{1/\alpha}$ *pa je zvezno odvedljiv z odvodom* $\left(\Phi^{-1}\right)'(y) = \frac{\sigma}{\alpha}\, y^{(1-\alpha)/\alpha}$. *Sledi, da je slučajna spremenljivka* Y *porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za* $y > 0$ *enaka*

$$f_Y(y) = \frac{\sigma}{\alpha}\, y^{(1-\alpha)/\alpha} f_X\left(\sigma\, y^{1/\alpha}\right) = e^{-y} ,$$

drugje pa lahko postavimo $f_Y(y) = 0$. *Z drugimi besedami, velja* $Y \sim \exp(1)$.

Drugi način. *Opazimo, da za* $x > 0$ *velja*

$$F_X(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\int_0^x \left(\frac{t}{\sigma}\right) e^{-(t/\sigma)^\alpha} dt = \int_0^{(x/\sigma)^\alpha} e^{-s} ds = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha} .$$

Za $y > 0$ *pa izračunamo*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P\left(\left(\frac{X}{\sigma}\right)^\alpha \le y\right) \\ &= P\left(X \le \sigma\, y^{1/\alpha}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{\sigma y^{1/\alpha}}{\sigma}\right)^\alpha} \\ &= 1 - e^{-y} . \end{aligned}$$

Iz monotonosti kumulativne porazdelitvene funkcije sledi, da mora za $y \le 0$ *veljati* $F_Y(y) = 0$. *Funkcija* F_Y *je torej zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, kar pomeni, da je* Y *porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za* $y > 0$ *enaka*

$$f_Y(y) = e^{-y} .$$

sicer pa je $f_Y(y) = 0$. *Seveda smo dobili isto kot prej.*

b. (10) Naj bo $U \sim U(0,1)$. Pokažite, da ima slučajna spremenljivka

$$Z = \sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha}$$

za $\alpha, \sigma > 0$ Weibullovo gostoto.

Rešitev: enako kot pri prejšnji točki lahko tudi to rešimo na dva načina.

Prvi način: *uporabimo transformacijsko formulo. Funkcija* $\Psi(u) = \sigma(-\log u)^{1/\alpha}$ *interval* $(0,1)$ *bijektivno preslika na poltrak* $(0,\infty)$, *njen inverz* $\Psi^{-1}(z) = e^{-(z/\sigma)^\alpha}$ *pa je zvezno odvedljiv z odvodom* $\left(\Psi^{-1}\right)'(z) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha-1}$. *Sledi, da je slučajna spremenljivka* Z *porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za* $z > 0$ *enaka*

$$f_Z(z) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha-1} f_U\left(e^{-(z/\sigma)^\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha-1},$$

drugje pa lahko postavimo $f_Z(z) = 0$. *To pa pomeni, da je* Z *porazdeljena enako kot* X.

Drugi način. *Za* $z > 0$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}
P(Z \le z) &= P\Big(\sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha} \le z\Big) \\
&= P\Big(-\log U \le \left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha\Big) \\
&= P\Big(\log U \ge -\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha\Big) \\
&= P\Big(U \ge e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha}\Big) \\
&= 1 - e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^\alpha}
\end{aligned}$$

in dobimo isto kumulativno porazdelitveno funkcijo, kot smo jo dobili pri drugem načinu rešitve točke a. za spremenljivko X *(in za* $z > 0$ *lahko argumentiramo na enak način kot tam). Spet smo dobili, da je slučajna spremenljivka* Z *porazdeljena enako kot* X.

4. (20) V posodi imamo kroglice m različnih barv. Števila kroglic posameznih barv so $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Označimo $N = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$. Iz posode naključno in brez vračanja izberemo n kroglic, tako da so vsi nabori n kroglic enako verjetni. Z X označimo število kroglic prve barve, z Y pa število različnih barv med izbranimi kroglicami.

a. (15) Za $k = 1, 2, \ldots, n$ definirajte

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta izbrana kroglica prve barve;} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

za $l = 1, 2, \ldots, m$ pa

$$J_l = \begin{cases} 1 & \text{če je } l\text{-ta barva zastopana med izbranimi kroglicami;} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte $\mathrm{cov}(I_k, J_l)$.

Rešitev: vemo, da je k-ta kroglica z enako verjetnostjo katera koli kroglica, zato je

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{B_1}{N}\,.$$

Če z X_l označimo število kroglic barve l, je $X_l \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B_l, N)$. Posledično je

$$E(J_l) = P(J_l = 1) = 1 - P(X_l = 0) = 1 - \frac{\binom{N-B_l}{n}}{\binom{N}{n}}\,.$$

Potrebujemo še $E(I_k J_l)$. Zapišemo

$$E(I_k J_l) = P(I_k = 1, J_l = 1) = P(J_l = 1 \mid I_k = 1)\, P(I_k = 1)\,.$$

Očitno je

$$P(J_1 = 1 \mid I_k = 1) = 1\,,$$

medtem ko za $l \ge 2$ velja $X_l \mid I_k = 1 \sim \mathrm{HiperGeom}(n-1, B_l, N-1)$. Posledično je

$$P(J_l = 1 \mid I_k = 1) = 1 - P(X_l = 0 \mid I_k = 1) = 1 - \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\,.$$

Sledi

$$E(I_k J_1) = E(I_k) = \frac{B_1}{N}$$

in

$$\mathrm{cov}(I_k, J_1) = \frac{B_1}{N} \frac{\binom{N-B_1}{n}}{\binom{N}{n}}\,,$$

za $l \geq 2$ pa je

$$E(I_k J_l) = \frac{B_1}{N}\left(1 - \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\right)$$

in

$$\operatorname{cov}(I_k, J_l) = \frac{B_1}{N}\left(-\frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} + \frac{\binom{N-B_l}{n}}{\binom{N}{n}}\right) = -\frac{B_1 B_l}{N^2}\,\frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\,.$$

b. (5) Izračunajte $\operatorname{cov}(X, Y)$. Dovolj je, da rezultat izrazite z *enojno* vsoto.

Rešitev: velja $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$ in $Y = \sum_{l=1}^{m} J_l$. Z uporabo bilinearnosti kovariance sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \operatorname{cov}(I_k, J_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(I_k, J_1) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{m} \operatorname{cov}(I_k, J_l) \\
&= n\,\frac{B_1}{N}\left(\frac{\binom{N-B_1}{n}}{\binom{N}{n}} - \sum_{l=2}^{m} \frac{B_l}{N}\,\frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

5. (20) V igri na srečo je možno zadeti dve bonus igri, torej to, da igramo dvakrat brez plačila stave. Natančneje, zadenemo dve igri ali pa nobene. Verjetnost za zadetek bonus igrer je $p < \frac{1}{2}$. Bonus igri sta identični izhodiščni igri, tako da lahko znotraj njiju spet zadenemo bonus igri. Predpostavljamo, da v primeru, ko igralec zadene bonus igro, odigra to igro in vse morebitne vgnezdene bonus igre, preden gre naprej. Izidi vseh iger so neodvisni med sabo.

a. (5) Naj bo X število vseh iger, ki jih bo igralec odigral s prvo stavo, in naj bo Y število bonus iger na prvem koraku. Izračunajte

$$E(s^X \mid Y = 0) \qquad \text{in} \qquad E(s^X \mid Y = 2)\,.$$

Pri izražavi lahko uporabite (brezpogojno) rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X.

Rešitev: besedilo je identično procesu razvejanja, pri katerem je število potomcev nič z verjetnostjo $q = 1 - p$ ali dva z verjetnostjo p. Iščemo porazdelitev števila vseh posameznikov v procesu razvejanja. Naj bo Y število bonus iger na prvem koraku. Velja

$$E\left(s^X \mid Y = 0\right) = s \qquad \textit{in} \qquad E(s^X \mid Y = 2) = sG_X(s)^2\,,$$

ker se v primeru bonus igre pojavita neodvisni identični drevesi še enkrat.

b. (15) Za rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X izpeljite primerno funkcijsko enačbo in izračunajte $P(X = 7)$.

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost velja

$$G_X(s) = (1-p)s + ps\, G_X^2(s)\,.$$

Enačbo rešimo in dobimo

$$G_X(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)s^2}}{2ps}\,.$$

Iz Newtonove formule sledi, da moramo pri rešitvah kvadratne enačbe vzeti minus. Sledi

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} 2^{2k-1} p^{k-1} (1-p)^k s^{2k-1}\,.$$

Iskana verjetnost je koeficient vrste na desni pri s^7, kar ustreza $k = 4$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
P(X = 7) &= -\binom{1/2}{4} \cdot 2^7 p^3 (1-p)^4 \\
&= -\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^7 p^7 (1-p)^4 \\
&= 5p^7(1-p)^4\,.
\end{aligned}$$

Rezultat pa lahko dobimo tudi tako, da preštejemo drevesa s sedmimi predstavniki, pri čemer ločimo vozlišča.

6. (20) Naj bo gostota slučajne spremenljivke X dana z

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{a^2}{2x}}$$

za $x > 0$ in 0 sicer. Slučajna vektorja (X, Y) in (W, Z) naj bosta neodvisna z gostotama

$$f_{X,Y}(x, y) = f_a(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{(y-\mu x)^2}{2x}}$$

in

$$f_{W,Z}(w, z) = f_b(w) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi w}}\, e^{-\frac{(z-\mu w)^2}{2w}}$$

za $x, w > 0$, $y, z \in \mathbb{R}$, $a, b, \mu > 0$, sicer pa naj bo gostota enaka 0.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajnega vektorja $(X+W,\ Y+Z)$. Kot znano privzemite, da je za neodvisni slučajni spremenljivki z gostotama f_a in f_b gostota vsote enaka f_{a+b}.

Rešitev: označimo $(X + W,\ Y + Z) = (U, V)$. *Oglejmo si preslikavo*

$$\Phi(x, y, w, z) = (x, y, x + w, y + z)\,.$$

Preslikava je linearna in obrnljiva, zato lahko uporabimo transformacijsko formulo. Ugotovimo, da je

$$\Phi^{-1}(x, y, u, v) = (x, y, u - x, v - y)$$

in

$$J_{\Phi^{-1}}(x, y, u, v) = 1\,.$$

Sledi

$$f_{X,Y,U,V}(x, y, u, v) = f_{X,Y}(x, y)\, f_{W,Z}(u - x, v - y)\,.$$

Gostoto slučajnega vektorja (U, V) *dobimo kot robno gostoto. Za* $u > 0$ *in* $v \in \mathbb{R}$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}
&f_{U,V}(u, v) \\
&\quad= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x, y)\, f_{W,Z}(u - x, v - y)\, dy\, dx \\
&\quad= \int_0^\infty f_a(x)\, f_b(u - x)\times \\
&\qquad\quad \times \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{(y-\mu x)^2}{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(u - x)}}\, e^{-\frac{(v-y-\mu(u-x))^2}{2(u-x)}}\, dy\, dx \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\, e^{-\frac{(v-\mu u)^2}{2u}} \int_0^\infty f_a(x)\, f_b(u - x)\, dx \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\, e^{-\frac{(v-\mu u)^2}{2u}}\, f_{a+b}(u) \\
&\quad= \frac{a + b}{2\pi u^2}\, e^{-\frac{(v-\mu u)^2+(a+b)^2}{2u}}\,,
\end{aligned}$$

drugje pa lahko postavimo $f_{U,V}(u,v) = 0$. Upoštevali smo, da je notranji integral konvolucija dveh normalnih gostot.

b. (10) Pokažite, da imata slučajna vektorja

$$\left(\frac{X}{a^2}, \frac{Y-\mu X}{a}\right) \qquad \text{in} \qquad \left(\frac{X+W}{(a+b)^2}, \frac{Y+Z-\mu(X+W)}{a+b}\right)$$

enako gostoto.

Rešitev: dovolj je pokazati, da je gostota prvega slučajnega vektorja neodvisna od a: trditev potem sledi iz prvega dela naloge. Iz transformacije

$$\Psi(x,y) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y-\mu x}{a}\right),$$

ki je linearna z inverzom

$$\Psi^{-1}(t,s) = \left(a^2 t, as + a^2 \mu t\right)$$

in $J\Psi^{-1} = a^3$, dobimo, da je gostota prvega slučajnega vektorja enaka

$$f(t,s) = a^3 f_{X,Y}(a^2 t, as + a^2\mu t) = a^3 f_a(a^2 t)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{s^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi t^2}\, e^{-\frac{1+s^2}{2t}},$$

kar je res neodvisno od a in trditev sledi.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

Pisni izpit

18. 6. 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

6. (20) Predpostavite, da sta slučajni spremenljivki U in Z neodvisni z $U \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-au-\frac{b}{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Definirajte $X = \sqrt{2U}\,Z$.

a. (10) Poiščite gostoto para (U, X) in nato izpeljite gostoto slučajne spremenljivke X.

Rešitev: definirajmo preslikavo

$$\Phi(u,z) = \left(u,\ \sqrt{2u}z\right)\,.$$

Preslikava množico $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *bijektivno preslika samo nase, njen inverz*

$$\Phi^{-1}(u,x) = \left(u,\ \frac{x}{\sqrt{2u}}\right)$$

pa je parcialno zvezno odvedljiv z

$$J_{\Phi^{-1}}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2u}}\,.$$

Za $u > 0$ *in* $x \in \mathbb{R}$ *je torej*

$$f_{U,X}(u,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}}\, e^{-u-\frac{x^2}{4u}}\,,$$

drugje pa lahko postavimo $f_{U,X}(u,x) = 0$.

Gostoto X *izračunamo kot robno gostoto. Iz omenjenega znanega integrala razberemo, da je*

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|}\,.$$

b. (10) Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni. Izračunajte gostoto vsote $S = X + Y$.

Namig: računajte po formuli

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x)\, f_Y(s-x)\, dx\,.$$

Rešitev: zaradi simetrije bo $f_S(s) = f_S(-s)$*, zato bo gostoto dovolj izračunati za* $s \geq 0$*, tedaj pa velja*

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(s-x)\, dx \\
&\quad = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-|x-s|} dx \\
&\quad = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2x-s} dx + \int_{0}^{s} e^{-s} dx + \int_{s}^{\infty} e^{-2x+s} dx\right) \\
&\quad = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\, e^{-s} + s\, e^{-s} + \frac{1}{2}\, e^{-s}\right) \\
&\quad = \frac{1}{4}(1+s)\, e^{-s}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
f_S(s) = \frac{1}{4}(1+|s|)\, e^{-|s|}\,.
$$