Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

15. junij 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Štirim igralcem razdelimo po pet kart z dobro premešanega kupa standardnih 52 kart. *Kraljeva lestvica* (angl. *royal flush*) pomeni, da igralec dobi asa, kralja, damo, fanta in desetico iste barve.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da nobeden od igralcev ne dobi kraljeve lestvice. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: za $i = 1, 2, 3, 4$ *označimo* $A_i = \{i\text{-ti igralec dobi kraljevo lestvico}\}$. *Velja:*

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2) &= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}}\,. \end{aligned}$$

Iskana verjetnost je $1 - P\big(\bigcup_{i=1}^4 A_i\big)$. *Iz načela vključitev in izključitev ter simetrije dobimo*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) = 4\,P(A_1) - 6\,P(A_1 \cap A_2) + 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\,,$$

iskana verjetnost pa je

$$1 - \frac{16}{\binom{52}{5}} + \frac{72}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}} - \frac{96}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}} + \frac{24}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}}\,.$$

Numerični rezultat je $1 - 6{,}16 \cdot 10^{-6}$.

b. (10) Eden od igralcev je gospod Lancelot. Izračunajte pogojno verjetnost, da gospod Lancelot dobi kraljevo lestvico, če vemo, da je kraljevo lestvico dobil vsaj eden od igralcev.

Rešitev: naj bo B *dogodek, da vsaj eden od igralcev dobi barvno lestvico,* A *pa naj bo dogodek, da jo dobi gospod Lancelot. Velja*

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}}\,, \qquad P(B) = \frac{16}{\binom{52}{5}} - \frac{72}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}} + \frac{96}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}} - \frac{24}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}}$$

in $A \cap B = A$. *Iskana pogojna verjetnost je torej enaka* $P(A)/P(B)$. *Numerični rezultat je* $0{,}25000073$.

2. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$, tj.

$$P(X_1 = r) = pq^{r-1}\,; \quad r = 1, 2, \ldots\,,$$

kjer je $q = 1 - p$. Označimo $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

a. (10) Za vse $1 \le k \le n$ izračunajte $P(S_k = n)$.

   Rešitev: ker so vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih geometrijsko z istim parametrom, porazdeljene negativno binomsko, je $S_k \sim \mathrm{NegBin}(k, p)$, *torej*

$$P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}\,.$$

b. (10) Za vsak $n \ge 1$ izračunajte

$$f_n = P\big(S_k = n \text{ za neki } k = 1, 2, \ldots, n\big)\,.$$

   Rešitev: pišimo

$$f_n = P\big(\cup_{k=1}^n \{S_k = n\}\big)$$

   in opazimo, da so dogodki v uniji disjunktni. Torej je

$$f_n = \sum_{k=1}^n P(S_k = n)\,.$$

   Z uporabo rezultata prve točke in binomske formule dobimo

$$f_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = p\,.$$

3. (20) Slučajni vektor (U, X, Y) naj bo porazdeljen zvezno z gostoto

$$f(u, x, y) = \frac{xy}{\pi\sqrt{u^3(1-u)^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2u}}\, e^{-\frac{y^2}{2(1-u)}}$$

za $u \in (0, 1)$ in $x, y > 0$; drugje naj bo gostota enaka nič. Definirajmo

$$W = \frac{X}{\sqrt{U}} \qquad \text{in} \qquad Z = \frac{Y}{\sqrt{1-U}}\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajnega vektorja (U, W, Z). So slučajne spremenljivke U, W in Z neodvisne?

Rešitev: definirajmo funkcijo

$$\Phi(u, x, y) = \left(u,\ \frac{x}{\sqrt{u}},\ \frac{y}{\sqrt{1-u}}\right)$$

in opazimo, da Φ preslika množico $(0, 1) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ bijektivno samo vase, inverz pa je enak

$$\Phi^{-1}(u, w, z) = \left(u,\ w\sqrt{u},\ z\sqrt{1-u}\,\right),$$

od koder sledi $J_{\Phi^{-1}}(u, w, z) = \sqrt{u(1-u)}$. Transformacijska formula nam da

$$f_{U,W,Z}(u, w, z) = \frac{\sqrt{u(1-u)}\, wz}{\pi\sqrt{u^3(1-u)^3}}\, e^{-\frac{w^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sqrt{u(1-u)}\,,$$

kar se poenostavi v

$$f_{U,W,Z}(u, w, z) = \frac{wz}{\pi\sqrt{u(1-u)}}\, e^{-\frac{w^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

Iz tega razberemo, da so U, W in Z neodvisne.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja $(U, Y) = \left(U, Z\sqrt{1-U}\,\right)$ in slučajne spremenljivke Y.

Namig: pri računanju robne gostote uporabite novo spremenljivko

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} = v\,.$$

Rešitev: ker je $\int_0^\infty w\, e^{-w^2/2} dw = 1$, ima slučajni vektor (U, Z) gostoto

$$f_{U,Z}(u, z) = \frac{z}{\pi\sqrt{u(1-u)}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

Iz transformacijske formule za preslikavo $\Phi(u, z) = \left(u, \sqrt{1-u} \cdot z\right)$ dobimo

$$f_{U,Y}(u, y) = f_{U,Z}\left(u, y/\sqrt{1-u}\,\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u}}\,.$$

Slednji enakosti se združita v

$$f_{U,Y}(u,y) = \frac{y}{\pi\sqrt{u(1-u)^3}}\, e^{-\frac{y^2}{2(1-u)}}\,.$$

Gostota slučajne spremenljivke Y je robna gostota, kar pomeni, da moramo zgornjo gostoto integrirati po u. Skladno z namigom uvedemo novo spremenljivko

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} = v$$

in dobimo

$$\frac{du}{2\sqrt{u(1-u)^3}} = dv \qquad in \qquad \frac{1}{1-u} = 1+v^2\,.$$

Končno je

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{2y}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2(1+v^2)}{2}}\,dv \\ &= \frac{4y}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2v^2}{2}}\,dv \\ &= \frac{4y}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{2y} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,, \end{aligned}$$

seveda za $y > 0$; drugje je gostota enaka nič.

4. (20) V zaporedju neodvisnih metov poštenega kovanca naj bo X število metov do prve pojavitve vzorca GG, Y pa naj bo število metov do druge pojavitve tega vzorca. Primera:

$$\begin{array}{ll} \text{GŠŠGGŠŠŠGŠGG} & X = 5, \quad Y = 12 \\ \text{GŠŠGŠŠGŠŠGGG} & X = 11, \quad Y = 12 \end{array}$$

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: definirajmo dogodke $B_1 = \{\textit{prvi met je Š}\}$, $B_2 = \{\textit{prva dva meta sta GŠ}\}$ *in* $B_3 = \{\textit{prva dva meta sta GG}\}$. *Velja*

$$E(X|B_1) = 1 + E(X)\,, \quad E(X|B_2) = 2 + E(X) \quad \textit{in} \quad E(X|B_3) = 2\,.$$

Formula za popolno pričakovano vrednost nam da

$$E(X) = \tfrac{1}{2}\big(1 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4}\big(2 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4} \cdot 2\,.$$

Rešimo linearno enačbo in dobimo $E(X) = 6$.

b. (10) Izračunajte $E(Y - X)$.

Rešitev: za $k = 2, 3, \ldots$ *definiramo*

$$B_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je } G\}$$

in

$$C_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je Š}\}\,.$$

Velja

$$E(Y - X|B_k) = 1 \quad \textit{in} \quad E(Y - X|C_k) = 1 + E(X)\,.$$

Dogodki $B_2, B_3, \ldots, C_2, C_3, \ldots$ *tvorijo particijo in formula za popolno pričakovano vrednost nam da*

$$E(Y - X) = \sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \big(1 + E(X)\big) P(C_k)\,.$$

Ker je $P(B_k) = P(C_k)$ *in ker ti dogodki tvorijo particijo, je* $\sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=2}^{\infty} P(C_k) = \frac{1}{2}$. *Sledi*

$$E(Y - X) = 1 + \tfrac{1}{2}E(X) = 4\,.$$

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z isto porazdelitvijo. Za $k \geq 1$ naj velja

$$P(X = k) = \frac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)\,.$$

Naj bo G rodovna funkcija spremenljivk X in Y.

a. (10) Poiščite enačbo, ki ji zadošča ta rodovna funkcija..

Rešitev: pomnožimo obe strani dane zveze z s^k in seštejmo po $k \geq 1$. Če označimo $P(X = 0) = p$, velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)s^k = G_X(s) - p$$

in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)s^k = \frac{s}{4}\, G_{X+Y}(s)\,.$$

Ker imata X in Y isto porazdelitev, velja $G_{X+Y}(s) = G(s)^2$. Iskana enačba je

$$G(s) - p = \frac{s}{4}\, G(s)^2\,.$$

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Namig: upoštevajte, da je $G(1) = 1$, in uporabite Newtonov razvoj:

$$\sqrt{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k\,; \quad |x| < 1\,.$$

Rešitev: ker je $G(1) = 1$, nam enačba iz prve točke da

$$1 - p = \frac{1}{4}\,,$$

torej $p = \frac{3}{4}$. Zdaj pa to vstavimo v zvezo in jo rešimo:

$$G(s) = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3s}{4}}\right)}{s}\,.$$

Ker morajo biti koeficienti v razvoju nenegativni in ker je $(-1)^k \binom{1/2}{k} < 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$, je pravilna izbira negativni predznak korena. Razvoj v potenčno vrsto nam tako da

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} \frac{3^k s^{k-1}}{4^k}$$

in končno

$$P(X = k) = 2 \binom{1/2}{k+1} (-1)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\,.$$

6. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke z $X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$. Za $k \geq 1$ označimo $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

a. (10) Izberimo fiksen $n \geq 1$ in definirajmo $B_k = \{S_k \leq n, S_{k+1} > n\}$. Izračunajte $P(B_k)$.

Namiga:

- $B_k = \cup_{l=k}^{n} \{S_k = l, S_{k+1} > n\}$;
- $\binom{l-1}{k-1} + \binom{l-1}{k} = \binom{l}{k}$ *(pri dogovoru, da je* $\binom{l}{k} = 0$*, če je* $k < 0$ *ali* $k > l$*).*

Rešitev: vemo, da je $S_k \sim \mathrm{NegBin}(k,p)$*. Označimo* $q = 1 - p$*. Iz neodvisnosti sledi*

$$
\begin{aligned}
P(B_k) &= P\big(S_k \leq n, S_{k+1} > n\big) \\
&= \sum_{l=k}^{n} P\big(S_k = l, X_{k+1} > n - l\big) \\
&= \sum_{l=k}^{n} P(S_k = l) P(X_{k+1} > n - l) \\
&= \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} p^k q^{l-k} \cdot q^{n-l} \\
&= p^k q^{n-k} \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} .
\end{aligned}
$$

Zdaj pa uporabimo drugi namig in to prepišemo v obliki

$$
\begin{aligned}
P(B_k) &= p^k q^{n-k} \sum_{l=k}^{n} \left[\binom{l}{k} - \binom{l-1}{k} \right] \\
&= p^k q^{n-k} \left[\binom{n}{k} - \binom{k-1}{k} \right] \\
&= p^k q^{n-k} \binom{n}{k} .
\end{aligned}
$$

b. (10) Za $k \leq n$ izračunajte pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $S_{k+1} - n$ glede na B_k.

Rešitev: Fiksirajmo $m \geq 1$ *in izračunajmo*

$$\begin{aligned} P\big(\{S_{k+1} - n = m\} \cap B_k\big) &= \sum_{l=k}^{n} P\big(\{S_{k+1} - n = m\} \cap \{S_k = l\}\big) \\ &= \sum_{l=k}^{n} P\big(\{S_{k+1} = m + n - l\} \cap \{S_k = l\}\big) \\ &= \sum_{l=k}^{n} pq^{m+n-l-1} \binom{l-1}{k-1} p^k q^{l-k} \\ &= p^{k+1} q^{m+n-k-1} \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} \\ &= p^{k+1} q^{m+n-k-1} \binom{n}{k} . \end{aligned}$$

Torej je

$$P(S_{k+1} - n = m | B_k) = pq^{m-1} ,$$

in iskana pogojna porazdelitev je Geom(p)*.*