FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

14. junij 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Štirim igralcem razdelimo vsakemu po 13 kart z dobro premešanega kupa 52 standardnih kart. Med 52 kartami so štirje asi.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo vsaj en igralec imel vsaj dva asa?

Rešitev: nasprotni dogodek je, da ima vsak igralec natanko enega asa. Njegovo verjetnost lahko izračunamo tako, da za izide vzamemo vse možne razporeditve asov v kupu, pri čemer vrhnjim 13 kart dobi prvi igralec, nadaljnjih 13 drugi in tako naprej. Iskana verjetnost je enaka

$$1 - \frac{13^4}{\binom{52}{4}} \doteq 0{,}895\,.$$

b. (10) Recimo, da ima res vsaj en igralec vsaj dva asa. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima prvi igralec natanko enega asa?

Rešitev: označimo z V dogodek, da ima vsaj en igralec vsaj enega asa, z A_1 pa dogodek, da ima prvi igralec natanko enega asa. Velja

$$P(A_1 \mid V) = \frac{P(A_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A_1)\, P(V \mid A_1)}{P(V)}\,.$$

Pogojno verjetnost dogodka V glede na A_1 dobimo na enak način kot brezpogojno, le da gledamo razporeditve preostalih treh asov med 39 kart, ki jih dobijo preostali igralci. Torej je

$$P(V \mid A_1) = 1 - \frac{13^3}{\binom{39}{3}}$$

in končno

$$P(A_1 \mid V) = \frac{\frac{13\cdot\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}\left(1 - \frac{13^3}{\binom{39}{3}}\right)}{1 - \frac{13^4}{\binom{52}{4}}} = \frac{13\cdot\binom{39}{3} - 13^4}{\binom{52}{4} - 13^4} \doteq 0{,}373\,.$$

2. (20) Standardni kup 52 kart, v katerem so štirje asi, dobro premešamo in štirim igralcem razdelimo po 13 kart. Za $i = 1, 2, 3, 4$ naj bo X_i število asov, ki jih ima i-ti igralec.

a. (10) Poiščite porazdelitev vektorja (X_1, X_2, X_3, X_4).

Rešitev: možni nabori vrednosti slučajnega vektorja so četverice (k_1, k_2, k_3, k_4) *s* $k_i \geq 0$ *in* $\sum_{i=1}^4 k_i = 4$. *Takim četvericam bomo rekli* legitimne. *Če za izide vzamemo vse možne razporeditve štirih asov v kupu, pri čemer vrhnjih 13 kart dobi prvi igralec, nadaljnjih 13 drugi in tako naprej, za vsako legitimno četverico* (k_1, k_2, k_3, k_4) *dobimo*

$$P(X_1 = k_1,\, X_2 = k_2,\, X_3 = k_3,\, X_4 = k_4) = \frac{\binom{13}{k_1}\binom{13}{k_2}\binom{13}{k_3}\binom{13}{k_4}}{\binom{52}{4}}\,.$$

b. (10) Za $i \neq j$ izračunajte $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

Rešitev:

Prvi način.

Definirajmo

$$I_m = \begin{cases} 1 & \text{če je } m\text{-ti as pri igralcu } i; \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$J_n = \begin{cases} 1 & \text{če je } n\text{-ti as pri igralcu } j; \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako je $X_i = \sum_{m=1}^4 I_m$ *in* $X_j = \sum_{n=1}^4 J_n$. *Zaradi simetrije je*

$$P(I_n = 1) = P(J_n = 1) = E(I_n) = E(J_n) = \frac{1}{4}$$

in po linearnosti pričakovane vrednosti je $E(X_i) = E(X_j) = 1$. *Prav tako po linearnosti je*

$$E(X_i X_j) = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 E(I_m J_n) = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 P(I_m = 1, J_n = 1)\,.$$

Očitno je $I_n J_n = 0$, *za* $m \neq n$ *pa velja*

$$P(I_m = 1, J_n = 1) = \frac{13^2}{52 \cdot 51}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$E(X_i X_j) = 12 \cdot \frac{13^2}{52 \cdot 51} = \frac{13}{17}\,.$$

Končno je

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)\, E(X_j) = -\frac{4}{17}\,.$$

Drugi način.

Začnemo tako kot pri prvem načinu – naj bodo I_m in J_n kot prej. Ker je $I_n J_n = 0$, je

$$\operatorname{cov}(I_n, J_n) = -\frac{1}{16}\,,$$

za $n \neq m$ pa je

$$\operatorname{cov}(I_m, J_n) = \frac{13^2}{52 \cdot 51} - \frac{1}{16} = \frac{52}{816} - \frac{51}{816} = \frac{1}{816}\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{m=1}^{4} I_m\,,\ \sum_{n=1}^{4} J_n\right) \\
&= 4\operatorname{cov}(I_1, J_1) + 12\operatorname{cov}(I_1, J_2) \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{68} \\
&= -\frac{4}{17}\,.
\end{aligned}$$

Tretji način.

Karte i tega in j-tega igralca so naključni vzorec 26 kart izmed vseh kart, zato je $X_i + X_j \sim \mathrm{HiperGeom}(26, 4, 52)$. Sledi

$$\operatorname{var}(X_1 + X_2) = 26 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52-26}{52-1}\,.$$

Podobno je $X_i \sim \mathrm{HiperGeom}(13, 4, 52)$, kar pomeni

$$\operatorname{var}(X_i) = 13 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52-13}{52-1}\,.$$

Velja

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{var}(X_i + X_j) - \operatorname{var}(X_i) - \operatorname{var}(X_j)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{16}{17} - \frac{24}{17}\right) \\
&= -\frac{4}{17}\,.
\end{aligned}$$

Četrti način.

Ker je $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4$, *je*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 0\,.$$

Zaradi simetrije so vse kovariance enake, z uporabo bilinearnsti pa sledi

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -\operatorname{var}(X_1)\,.$$

Vemo, da je $X_1 \sim \mathrm{HiperGeom}(13, 4, 52)$, *torej je*

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -13 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52 - 13}{52 - 1} = -\frac{4}{17}\,.$$

3. (20) Naj bosta X in Y neodvisni z $X \sim \Gamma(a+b, \lambda)$ in $Y \sim \text{Beta}(a, b)$. Definirajte

$$Z = XY \qquad \text{in} \qquad W = X(1-Y)\,.$$

a. (10) Najdite gostoto slučajne spremenljivke Z.

Rešitev:

Prvi način.

Poiščimo najprej gostoto vektorja (X, Z). *Preslikava*

$$\Phi(x, y) = (x, xy)$$

preslika $(0, \infty) \times (0, 1)$ *bijektivno na območje* $\{(x, z) \colon x > 0,\ 0 < z < x\}$. *Njen inverz*

$$\Phi^{-1}(x, z) = \left(x,\ \frac{z}{x}\right)$$

je parcialno zvezno odvedljiv in velja $J_{\Phi^{-1}}(x, z) = 1/x$. *Za* $x > 0$ *in* $0 < y < x$ *dobimo*

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}\, x^{a+b-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)}\, (z/x)^{a-1} (1 - z/x)^{b-1} \cdot \frac{1}{x}\,,$$

drugje pa lahko postavimo $f_{X,Z}(x, z) = 0$.

Gostota Z *je robna gostota* $f_{X,Z}(x, z)$. *Za* $z > 0$ *izračunamo*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a, b)}\, z^{a-1} \int_z^\infty (x - z)^{b-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a, b)}\, z^{a-1} \int_0^\infty u^{b-1} e^{-\lambda(z+u)} du \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a, b)}\, z^{a-1} e^{-\lambda z} \int_0^\infty u^{b-1} e^{-\lambda u} du\,,
\end{aligned}$$

drugje pa lahko postavimo $f_Z(z) = 0$. *Opazimo, da je gostota sorazmerna z* $z^{a-1} e^{-\lambda z}$, *torej gre za porazdelitev* $\Gamma(a, \lambda)$. *Vse konstante se zmnožijo v* $\lambda^a / \Gamma(a)$.

Drugi način.

Poiščimo najprej gostoto vektorja (Z, W). *Preslikava*

$$\Phi(x, y) = \big(xy,\ x(1-y)\big)\,.$$

preslika območje $(0, \infty) \times (0, 1)$ *bijektivno na* $(0, \infty)^2$ *in njen inverz*

$$\Phi^{-1}(z, w) = \left(z + w,\ \frac{z}{z + w}\right)$$

je parcialno zvezno odvedljiv. Velja

$$J_{\Phi^{-1}}(y,w) = -\frac{1}{z+w}\,.$$

Transformacijska formula nam za $z, w > 0$ da

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z,w) &= f_X(z+w)\, f_Y\left(\frac{z}{z+w}\right) \cdot \frac{1}{z+w} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}(z+w)^{a+b-1}e^{-\lambda(y+w)} \\ &\qquad \times \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\left(\frac{z}{z+w}\right)^{a-1}\left(1-\frac{z}{z+w}\right)^{b-1}\frac{1}{z+w} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,b)}\, z^{a-1}e^{-\lambda z}w^{b-1}e^{-\lambda w}\,, \end{aligned}$$

drugje pa lahko postavimo $f_{Z,W}(z,w) = 0$. Dobljena gostota je produkt funkcije samo spremenljivke z in funkcije samo spremenljivke w. Ta dva faktorja sta do multiplikativne konstante natančno gostoti slučajnih spremenljivk Z in W. Od tod razberemo, da je $Z \sim \Gamma(a,\lambda)$, poleg tega pa še, da je $W \sim \Gamma(b,\lambda)$, da sta Z in W neodvisni in končno še znana zveza $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

b. (10) Sta slučajni spremenljivki Z in W neodvisni?

Rešitev: da sta neodvisni, smo dokazali v drugem načinu rešitve prejšnje točke.

4. (20) Naj bo Π slučajna permutacija n elementov. Za dano permutacijo π je torej $P(\Pi = \pi) = \frac{1}{n!}$. Par (i, j) z $1 \leq i < j \leq n$ imenujemo inverzijo permutacije π, če velja $\pi(i) > \pi(j)$. Naj bo S_n število vseh inverzij slučajne permutacije Π.

a. (10) Za $2 \leq j \leq n$ definirajte slučajne spremenljivke

$$X_j = \sum_{i=1}^{j-1} I_{ij} \,,$$

kjer so indikatorji I_{ij} definirani kot

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če je } \Pi(i) > \Pi(j) \\ 0 & \text{sicer}\,. \end{cases}$$

Pokažite, da so spremenljivke $X_2, \ldots, X_n$ med sabo neodvisne, in najdite njihove porazdelitve. Pokažite, da je $S_n = X_2 + \cdots + X_n$.

Rešitev: naj bodo $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nenegativna cela števila s $k_j < j$; tako n-terico bomo imenovali legitimna. *Opazimo, da je $k_1 = 0$. Nadalje, induktivno opazimo, da, če poznamo velikostne odnose med števili $\Pi(1), \Pi(2), \ldots, \Pi(j-1)$, obstaja natanko en velikostni odnos med števili $\Pi(1), \Pi(2), \ldots, \Pi(j)$, pri katerem je $X_j = k_j$. To pa pomeni, da obstaja natanko ena permutacija Π, za katero je $X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n$. Ta zveza torej predstavlja bijektivno korespondenco med permutacijami n elementov in legitimnimi n-tericami. Torej za vsako legitimno n-terico $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ velja*

$$P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\big) = \frac{1}{n!}\,.$$

Ker so vse verjetnosti enake, množica legitimnih n-teric pa je kartezijski produkt n množic, so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, porazdelitev posamezne slučajne spremenljivke X_j pa je enakomerna na množici $\{1, 2, \ldots, j\}$. Enakost $S_n = X_2 + \cdots + X_n$ je preštevanje v nekoliko drugačnem vrstnem redu.

b. (10) Izračunajte $E(S_n)$ in $\operatorname{var}(S_n)$.

Rešitev: iz prvega dela sledi, da je

$$E(X_j) = \frac{j-1}{2}$$

in

$$\operatorname{var}(X_j) = \frac{j^2 - 1}{12}\,.$$

Sledi

$$E(S_n) = \frac{n(n-1)}{4}$$

in

$$\operatorname{var}(S_n) = \frac{n(-5 + 3n + 2n^2)}{72}\,.$$

5. (20) Predpostavite, da za zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ velja

$$E\big(s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\big) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)}$$

za $n \geq 1$ in $\lambda > 0$. Označite z $G_n(s)$ rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X_n.

a. (10) Naj bo $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Navedite porazdelitve slučajnih spremenljivk $X_2, X_3, \ldots$

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} E\big(s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\big) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+s}{2}\right)^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} P(X_n = k) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+s}{2}\right)^k P(X_n = k) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)}\, G_n\left(\frac{1+s}{2}\right). \end{aligned}$$

Iz predpostavke o porazdelitvi slučajne spremenljivke X_1 sledi, da je

$$G_2(s) = e^{-\frac{\lambda}{2}(1-s)}\, G_1\left(\frac{1+s}{2}\right) = e^{-\lambda(1-s)}\,.$$

Po indukciji je $X_n \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ za vse $n \geq 1$.

b. (10) Predpostavite, da je $X_1 \sim \mathrm{Po}(\mu)$, kjer je lahko μ različen od λ. Navedite porazdelitve slučajnih spremenljivk X_n za vse $n \geq 1$.

Rešitev: vemo, da je

$$G_1(s) = e^{-\mu(1-s)}\,.$$

Z uporabo rekurzije iz prvega dela po vrsti izračunamo:

$$\begin{aligned} G_2(s) &= e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}(1-s)} \\ G_3(s) &= e^{-\left[\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{\mu}{4}\right]} \\ G_4(s) &= \ldots\,, \end{aligned}$$

nakar uganemo, da je $X_n \sim \mathrm{Po}(\lambda_n)$, kjer je

$$\lambda_n = \frac{\mu}{2^{n-1}} + \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \lambda + \frac{\mu - \lambda}{2^{n-1}}\,.$$

Za slednjo enakost je dovolj preveriti, da velja rekurzivna zveza iz prvega dela.

6. (20) V televizijskem kvizu voditelj tekmovalcu postavlja vprašanja. Za vsak pravilen odgovor tekmovalec dobi točko. Tekmovalec izpade, ko napačno odgovori na dve zaporedni vprašanji.

Privzemite, da tekmovalec na vprašanja odgovarja pravilno z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od pravilnosti odgovorov na ostala vprašanja. Naj bo X število vprašanj, ki jih bo dobil tekmovalec, Y pa število točk, ki jih bo dosegel.

a. (10) Definirajte

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{tekmovalec odgovori pravilno na prvo vprašanje}\}\,, \\ H_2 &= \{\text{tekmovalec odgovori nepravilno na prvo in pravilno na drugo vprašanje}\}\,, \\ H_3 &= \{\text{tekmovalec odgovori nepravilno na prvi dve vprašanji}\}\,. \end{aligned}$$

Za $i = 1, 2, 3$ izrazite $E(X \mid H_i)$, $E(Y \mid H_i)$ in $E(XY \mid H_i)$ z $E(X)$, $E(Y)$ in $E(XY)$.

Rešitev: če tekmovalec odgovori pravilno na prvo vprašanje, se zaradi neodvisnosti zgodba začne na novo. Pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na H_1 se torej ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $X + 1$, pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke Y glede na H_1 pa se ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $Y + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} E(X \mid H_1) &= E(X + 1) = E(X) + 1\,, \\ E(Y \mid H_1) &= E(Y + 1) = E(Y) + 1\,, \\ E(XY \mid H_1) &= E\big((X + 1)(Y + 1)\big) = E(XY) + E(X) + E(Y) + 1\,. \end{aligned}$$

Podobno dobimo pogojno pričakovano vrednost glede na H_2, le da moramo X povečati za 2, Y pa za 1. Torej je

$$\begin{aligned} E(X \mid H_2) &= E(X + 2) = E(X) + 2\,, \\ E(Y \mid H_2) &= E(Y + 1) = E(Y) + 1\,, \\ E(XY \mid H_2) &= E(XY) + E(X) + 2E(Y) + 2\,. \end{aligned}$$

Končno je očitno

$$E(X \mid H_3) = 2\,, \quad E(Y \mid H_3) = 0\,, \quad E(XY \mid H_3) = 0\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Rešitev: dogodki H_1, H_2 in H_3 tvorijo popoln sistem dogodkov (particijo verjetnostnega prostora). Če vpeljemo $q = 1 - p$, iz prvega dela naloge in formule za popolno pričakovano vrednost dobimo

$$\begin{aligned} E(X) &= P(H_1)\,E(X \mid H_1) + P(H_2)\,E(X \mid H_2) + P(H_3)\,E(X \mid H_3) \\ &= (1 - q)\big(E(X) + 1\big) + q(1 - q)\big(E(X) + 2\big) + 2q^2\,. \end{aligned}$$

Rešimo enačbo in dobimo

$$E(X) = \frac{1+q}{q^2}\,.$$

Podobno dobimo tudi

$$\begin{aligned}
E(Y) &= (1-q)\bigl(E(Y)+1\bigr) + q(1-q)\bigl(E(Y)+1\bigr)\,,\\
E(Y) &= \frac{1-q^2}{q^2}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
E(XY) &= (1-q)\bigl(E(XY)+E(X)+E(Y)+1\bigr)\\
&\qquad + q(1-q)\bigl(E(XY)+E(X)+2E(Y)+2\bigr)\\
&= (1-q)\Bigl[(1+q)\,E(XY) + (1+q)\,E(X) + (1+2q)\,E(Y) + 1 + 2q\Bigr]\\
&= (1-q^2)E(XY) + \frac{(1-q)(2+4q+q^2)}{q^2}\,,\\
E(XY) &= \frac{(1-q)(2+4q+q^2)}{q^4}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{(1-q)(1+2q)}{q^4} = \frac{p(3-2p)}{(1-p)^4}\,.$$