Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

13. junij 2022

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

1. (20) Radoslav in Stanislav mečeta (skupno) kocko. Radoslav vztraja, da se meče, dokler ne pade liho število pik, Stanislav pa, dokler ne pade šestica. Mečeta, dokler vsaj eden od njiju vztraja. Predpostavljamo, da je kocka poštena, meti pa neodvisni. Naj bo $n = 1, 2, 3, \ldots$

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da sta kocko vrgla vsaj n-krat?

Rešitev: Dogodek M_n, da sta kocko metala vsaj n-krat, je unija naslednjih dveh dogodkov:

- $R_n := \{$*v vsakem izmed prvih* $n-1$ *metov je padlo sodo število pik*$\}$;
- $S_n := \{$*v nobenem izmed prvih* $n-1$ *metih ni padla šestica*$\}$.

Iskana verjetnost je enaka

$$P(M_n) = P(R_n) + P(S_n) - P(R_n \cap S_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} .$$

b. (10) Privzemimo, da sta kocko vrgla vsaj n-krat. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Stanislav vztrajal dlje?

Rešitev: Če z S označimo dogodek, da Stanislav vztraja dlje, je to dogodek, da liho število pik pade pred prvo šestico. Nadalje se na dogodku S število metov ujema s prvim metom, pri katerem pade šestica. Dogodek $S \cap M_n$ je torej dogodek, da je šestica prvič padla v n-tem metu ali kasneje, pred njo pa je že vsaj enkrat padlo liho mnogo pik. Še drugače, to je dogodek, da obstaja tak $k \geq n$, da je v k-tem metu padla šestica, v nobenem izmed prvih $k-1$ metov ni padla šestica, obenem pa ni res, da je v vsakem izmed prvih k metov padlo sodo mnogo pik. Tako dobimo

$$P(S \cap M_n) = \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ,$$

iskana verjetnost pa je enaka

$$P(S \mid M_n) = \frac{P(S \cap M_n)}{P(M_n)} = \frac{5^{n-1} - 2^{n-3}}{3^{n-1} + 5^{n-1} - 2^{n-1}} = 1 - \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-3}}{3^{n-1} + 5^{n-1} - 2^{n-1}} .$$

2. (20) Naj bo $a, b \in (0,1)$. Neodvisna para nenegativnih slučajnih spremenljivk (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) naj imata enako porazdelitev, dano s formulo

$$P(X_i = k, Y_i = l) = (1-a)a^k \cdot \binom{k}{l} b^l (1-b)^{k-l}$$

za $0 \le l \le k$ in $i = 1, 2$.

a. (5) Za *splošna* neodvisna slučajna vektorja (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) z nenegativnimi celoštevilskimi komponentami utemeljite, da je

$$P(X_1 + X_2 = k, Y_1 + Y_2 = l) = \sum_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le l}} P(X_1 = i, Y_1 = j)\, P(X_2 = k - i, Y_2 = l - j)\,.$$

Rešitev: zapišemo lahko

$$\{X_1 + X_2 = k, Y_1 + Y_2 = l\} = \bigcup_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le l}} \{X_1 = i, Y_1 = j, X_2 = k - i, Y_2 = l - j\}\,.$$

Dogodki v uniji so disjunktni, formula pa sledi, če upoštevamo neodvisnost.

b. (15) Poiščite porazdelitev para $(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$.

Namig: ena od vsot, ki se pojavi, je zelo podobna vsoti vseh verjetnosti v hipergeometrijski porazdelitvi.

Rešitev: fiksirajmo $k, l \ge 0$ z $l \le k$ in računamo

$$\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 = k, Y_1 + Y_2 = l) \\
&\quad = \sum_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le l \\ j \le i \\ l-j \le k-i}} P(X_1 = i, Y_1 = j)\, P(X_2 = k - i, Y_2 = l - j) \\
&\quad = \sum_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le l \\ j \le i \\ l-j \le k-i}} (1-a)^2 a^k \binom{i}{j} \binom{k-i}{l-j} b^l (1-b)^{k-l} \\
&\quad = (1-a)^2 a^k \cdot b^l (1-b)^{k-l} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=\max(0, l-k+i)}^{\min(i,l)} \binom{i}{j} \binom{k-i}{l-j} \\
&\quad = (1-a)^2 a^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{l} b^l (1-b)^{k-l} \\
&\quad = (k+1)(1-a)^2 a^k \binom{k}{l} b^l (1-b)^{k-l}\,.
\end{aligned}$$

Notranjo vsoto v četrti vrstici razberemo iz vsote verjetnosti v hipergeometrijski porazdelitvi $\mathrm{HiperGeom}(l, i, k)$.

3. (20) Naj bodo $X_1, X_2, X_3, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene eksponentno $\exp(1)$. Za $n = 1, 2, 3, \ldots$ definirajmo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k X_k\,.$$

a. (10) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunajte gostoto slučajnega vektorja $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

Rešitev: slučajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *ima skupno gostoto*

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-x_1-x_2-\cdots-x_n}$$

za $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$*, sicer pa lahko postavimo* $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. *Preslikava* Φ*, definirana po predpisu*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigl(2x_1, 2x_1 + 4x_2, 2x_1 + 4x_2 + 8x_3, \ldots, 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^n x_n\bigr)\,,$$

množico $(0, \infty)^n$ *bijektivno preslika na množico*

$$B := \bigl\{(s_1, s_2, \ldots, s_n)\,;\; s_n > s_{n-1} > \cdots > s_1 > 0\bigr\}$$

in je zvezno parcialno odvedljiva. Njen inverz je preslikava

$$\Phi^{-1}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \left(\frac{s_1}{2}\,, \frac{s_2 - s_1}{4}\,, \frac{s_3 - s_2}{8}\,, \ldots, \frac{s_n - s_{n-1}}{2^n}\right)$$

z Jacobijevo determinanto

$$J_{\Phi^{-1}} = \begin{vmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2^{-2} & 2^{-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2^{-3} & 2^{-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{-n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2^{-n} & 2^{-n} \end{vmatrix} = 2^{-n(n+1)/2}\,,$$

torej je iskana gostota za $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in B$ *enaka*

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = e^{-s_1/4-s_2/8-\cdots-s_{n-1}/2^n-s_n/2^n}\,,$$

drugje pa lahko postavimo $f_{S_1,S_2,\ldots,S_n}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke S_3.

Rešitev: iskano robno gostoto dobimo z integriranjem:

$$f_{S_3}(s_3) = \iint_{s_3>s_2>s_1>0} 2^{-6}\, e^{-s_1/4-s_2/8-s_3/8}\, ds_1\, ds_2\,.$$

Za $s_3 > 0$ *je*

$$\begin{aligned} f_{S_3}(s_3) &= \frac{1}{64}\, e^{-s_3/8} \int_0^{s_3} e^{-s_2/8} \int_0^{s_2} e^{-s_1/4}\, ds_1\, ds_2 \\ &= \frac{1}{16}\, e^{-s_3/8} \int_0^{s_3} \bigl(e^{-s_2/8} - e^{-3s_2/8}\bigr)\, ds_2 \\ &= \tfrac{1}{3}\, e^{-s_3/8} - \tfrac{1}{2}\, e^{-s_3/4} + \tfrac{1}{6}\, e^{-s_3/2}\,, \end{aligned}$$

drugje pa lahko postavimo $f_{S_3}(s_3) = 0$.

4. (20) V posodi je a rdečih, b belih in c modrih kroglic. Iz posode naključno izbiramo kroglice brez vračanja, dokler ne izberemo modre kroglice. Naj bo X število belih in Y število rdečih kroglic med izbranimi. Privzemite, da so rdeče kroglice oštevilčene z $1, 2, \ldots, a$ in bele z $1, 2, \ldots, b$. Za $0 \leq s \leq a$ in $0 \leq t \leq b$ definirajte

$$I_s = \begin{cases} 1\,, & \text{če rdeča kroglica z oznako } s \text{ pride pred prvo izvlečeno modro;} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$J_t = \begin{cases} 1\,, & \text{če bela kroglica z oznako } t \text{ pride pred prvo izvlečeno modro;} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(I_1, J_1)$.

Rešitev: mislimo si lahko, da z izbiranjem kroglic nadaljujemo, dokler ne izberemo vseh kroglic. Na koncu bodo bela kroglica z oznako 1 *in vse modre kroglice v naključnem vrstnem redu, bela z oznako* 1 *pa bo pred prvo modro z verjetnostjo* $1/(1+c)$*, torej* $E(I_1) = 1/(1+c)$*. Podoben razmislek velja za belo in rdečo kroglico z oznako* 1*. Obe bosta na koncu pred prvo modro z verjetnostjo* $2/(2+c)(1+c)$*. Sledi*

$$\operatorname{cov}(I_1, J_1) = \frac{2}{(2+c)(1+c)} - \frac{1}{(1+c)^2}\,,$$

kar se poenostavi v

$$\operatorname{cov}(I_1, J_1) = \frac{c}{(c+1)^2(c+2)}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Rešitev: velja

$$X = \sum_{s=1}^{b} I_s \qquad \textit{in} \qquad Y = \sum_{t=1}^{b} J_t\,.$$

Zaradi bilinearnosti kovariance je

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{s=1}^{a} \sum_{t=1}^{b} \operatorname{cov}(I_s, J_t)\,.$$

Zaradi simetrije so vse kovariance v dvojni vsoti enake in dobimo

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{abc}{(c+1)^2(c+2)}\,.$$

5. (20) Naj bodo $T_1, T_2, \ldots$ neodvisne, enako porazdeljene pozitivne celoštevilske slučajne spremenljivke. Naj bo $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$.

a. (10) Za $n \geq 1$ naj bo $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{S_k = n\}$. Definirajmo še

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \, P(T_1 = k) \qquad \text{in} \qquad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, P(A_n) \, .$$

Pokažite, da za $|s| < 1$ velja

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} \, .$$

Namig: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{S_k = n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{T_1 + \cdots + T_k = n\}$ *– unija je torej v resnici končna.*

Rešitev: Za fiksen $n \geq 1$ *so dogodki* $\{S_k = n\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *disjunktni, saj so slučajne spremenljivke* T_k *pozitivne. Velja*

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{S_k = n\} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k=1}^{n} P(T_1 + T_2 + \cdots + T_k = n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} s^n P(T_1 + T_2 + \cdots + T_k = n) \, . \end{aligned}$$

Ker so slučajne spremenljivke $T_1, T_2, \ldots$ *neodvisne, je rodovna funkcija vsote* $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ *kar* k*-ta potenca funkcije* G. *Sledi*

$$H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} G(s)^k = \frac{G(s)}{1 - G(s)} \, .$$

Opomba. *Rezultat velja tudi za nenegativne (a še vedno neodvisne in enako porazdeljene) slučajne spremenljivke* $T_1, T_2, \ldots$ *s* $P(T_1 = 0) < 1$, *če za funkcijo* H *vzamemo* $H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(X_n)$, *kjer je* X_n *število indeksov* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *za katere je* $S_k = n$.

b. (10) Privzemite, da je $T_1 \sim \mathrm{Geom}(p)$ za $p \in (0, 1)$. Izračunajte $P(A_n)$ za vse n.

Rešitev: računamo

$$H(s) = \frac{\frac{ps}{1-qs}}{1 - \frac{ps}{1-qs}} \, ,$$

pri čemer je $q = 1 - p$. *Poenostavimo v*

$$H(s) = \frac{ps}{1 - s} \, .$$

Razvijemo v vrsto in dobimo

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p s^n \, .$$

Sledi $P(A_n) = p$ *za vse* n.

6. (20) V posodi je a rdečih, b belih in c modrih kroglic. Iz posode naključno izbiramo kroglice brez vračanja, dokler ne izberemo modre kroglice. Naj bo X število belih, Y pa število rdečih kroglic med izbranimi.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y).

Rešitev: možne vrednosti za vektor (X, Y) so pari (k, l) z $0 \le k \le a$ in $0 \le l \le b$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če se med izbranimi kroglicami najprej zvrsti k rdečih in l belih, nakar sledi modra kroglica. Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način. *Prvih $k + l$ kroglic se lahko zvrsti na $\binom{k+l}{k} = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}$ disjunktnih načinov, vsi pa imajo verjetnost*

$$\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)\cdot b(b-1)\cdots(b-l+1)\cdot c}{N(N-1)\dots(N-k-l+1)(N-k-l)} = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{l}\,k!\,l!}{\binom{N}{k+l}\,(k+l)!}\cdot\frac{c}{N-k-l}\,,$$

kjer je $N = a + b + c$. Sledi

$$P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{l}}{\binom{N}{k+l}}\cdot\frac{c}{N-k-l}\,.$$

Drugi način. *Za izračun verjetnosti dogodka, da je med prvimi $k + l$ kroglicami k rdečih in l modrih, si predstavljamo, da so vse kroglice označene, med njimi pa naenkrat izberemo $k + l$ kroglic. Vseh možnosti je $\binom{N}{k+l}$, ugodnih pa je $\binom{a}{k}\binom{b}{l}$. Pogojno na omenjeni dogodek pa je verjetnost, da je naslednja kroglica modra, enaka $\frac{c}{N-k-l}$. Sestavimo in dobimo enako kot pri prejšnjem načinu.*

b. (10) Za $0 \le k \le a$ in $0 \le l \le b$ izračunajte $P(X = k, Y = l \mid X + Y = n)$.

Rešitev: zgornja pogojna verjetnost je različna od 0, če je $n = k + l$. Če vemo, da prvo modro kroglico izberemo na $(k+l+1)$-vem koraku, je zaradi simetrije prvih $k + l$ kroglic izbranih popolnoma naključno izmed $a + b$ belih in rdečih kroglic. To pa je predmet hipergeometrijske porazdelitve. Sledi

$$P(X = k, Y = l \mid X + Y = k + l) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{l}}{\binom{a+b}{k+l}}\,.$$

Pri tem je $\binom{n}{m} = 0$, če je $m > n$. Omenjeni rezultat lahko dobimo tudi tako, da s podobnim premislekom kot v točki a. izračunamo $P(X + Y = n)$, nakar delimo ustrezni verjetnosti.