FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

# Verjetnost

Pisni izpit

4. februar 2025



## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | • | • | • | • | |

**1.** (20) Črke A,A,A,A,A,B,B,D,K,R,R naključno permutiramo, tako da je vsak vrstni red enako verjeten. Označimo

$$B = \{\text{prva črka v slučajni permutaciji je A}\}$$

in

$$C = \{\text{slučajna permutacija črk je ABRAKADABRA}\}\,.$$

a. (10) Izračunajte $P(C)$.

*Rešitev: začnimo s prvim mestom. Verjetnost, da bo na prvem mestu črka A, je* $5/11$*. Pogojno na ta dogodek, je verjetnost, da bo na drugem mestu B, enaka* $2/10$*. Podobno nadaljujemo in dobimo, da je iskana verjetnost enaka*

$$\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost $P(B \mid C^c)$.

*Rešitev: najprej izračunamo* $P(B\cap C^c)$*. Ker je* $C\subseteq B$*, je*

$$P(B\cap C) = P(C)\,,$$

*torej*

$$P(B\cap C^c) = \frac{5}{11} - \frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

*Sledi*

$$P(B\mid C^c) = \frac{\frac{5}{11}-\frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}}{1-\frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}} = \frac{5\cdot 10! - 5!\cdot 2!\cdot 2!}{11! - 5!\cdot 2!\cdot 2!}\,.$$

**2.** (20) Pri igri *Črni Peter* imamo $n$ parov kart. Karti v vsakem paru sta enaki. Predpostavite, da imamo $m$ igralcev in je $m$ delitelj števila $2n$. Označimo $2n/m = a$. Karte dobro premešamo in jih razdelimo $m$ igralcem, tako da vsak dobi $a$ kart. Za $k = 1, 2, \ldots, m$ naj bo $X_k$ število parov, ki jih dobi igralec $k$.

a. (10) Izračunajte $E(X_k)$.

*Rešitev:*

Prvi način: *pare oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, n$ *in definiramo indikatorje*

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{če igralec } k \text{ ima } l\text{-ti par} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

*Velja* $X_k = I_{k,1} + \cdots + I_{k,n}$. *Zaradi načina deljenja kart bo vsak igralec dobil naključni vzorec* $a$ *kart izmed vseh* $2n$ *kart. Takih naključnih vzorcev je* $\binom{2n}{a}$. *Vzorcev, ki vsebujejo* $l$*-ti par, pa je* $\binom{2n-2}{a-2}$, *tako da je*

$$E(I_{k,l}) = P(I_{k,l} = 1) = \frac{\binom{2n-2}{a-2}}{\binom{2n}{a}} = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)}\,.$$

*Sledi*

$$E(X_k) = E(I_{k,1} + \cdots + I_{k,n}) = \frac{a(a-1)}{2(2n-1)}\,.$$

Drugi način: *karte, ki jih dobi* $k$*-ti igralec, oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, a$ *in definiramo indikatorje*

$$I_{k;i,j} = \begin{cases} 1 & \text{če } i\text{-ta in } j\text{-ta karta } k\text{-tega igralca tvorita par} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

*Tedaj velja*

$$X_k = \sum_{1 \le i < j \le a} I_{k;i,j}\,.$$

*Slučajno spremenljivko* $I_{k;i,j}$ *lahko interpretiramo kot indikator dogodka, da imata* $i$*-ta in* $j$*-ta karta* $k$*-tega igralca isto vrednost. Za* $i$*-to karto imamo* $2n$ *možnosti in vse so ugodne, nakar imamo za* $j$*-to karto* $2n-1$ *možnosti, izmed katerih pa je le ena ugodna. Torej je*

$$E(I_{k;i,j}) = P(I_{k;i,j} = 1) = \frac{1}{2n-1}\,.$$

*Ker je vseh parov* $(i, j)$, *za katere je* $1 \le i < j < n$, *natanko* $\binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$, *je*

$$E(X_k) = \sum_{1 \le i < j \le a} E(I_{k;i,j}) = \frac{a(a-1)}{2(2n-1)}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$.

*Rešitev:*

Prvi način: *z indikatorji iz prvega načina rešitve prejšnje točke nastavimo*

$$E(X_1 X_2) = \sum_{i,j} E(I_{1,i} I_{2,j}) \,.$$

*Za $i = j$ je $I_{1,i} I_{2,i} = 0$, saj igralca ne moreta hkrati dobiti istega para. Za $i \neq j$ pa je*

$$E(I_{1,i} I_{2,j}) = P(I_{1,i} = 1, I_{2,j} = 1) = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)} \,.$$

*Vseh možnih urejenih parov $(i, j)$ z $i \neq j$ je $n(n-1)$, torej je*

$$E(X_1 X_2) = (n-1) \cdot \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{a^2(a-1)^2}{4(2n-1)(2n-3)}$$

*in končno*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1)\, E(X_2) = \\
&= \frac{a^2(a-1)^2}{4(2n-1)(2n-3)} - \left(\frac{a(a-1)}{2(2n-1)}\right)^2 = \\
&= \frac{a^2(a-1)^2}{2(2n-1)^2(2n-3)} \,.
\end{aligned}$$

Drugi način: *še vedno delamo z indikatorji iz prvega načina rešitve točke a., a tokrat uporabimo bilinearnost kovariance:*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sum_{1 \le i,j \le n} \operatorname{cov}(I_{1,i}, I_{2,j}) \,.$$

*Za $i = j$ je $I_{1,i} I_{2,i} = 0$ in tako*

$$\operatorname{cov}(I_{1,i}, I_{2,i}) = -E(I_{1,i})\, E(I_{2,i}) = -\left(\frac{a(a-1)}{2(2n-1)}\right)^2 \,.$$

*Za $i \neq j$ pa tako kot pri prvem načinu izračunamo*

$$E(I_{1,i} I_{2,j}) = \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)}$$

*in posledično*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(I_{1,i}, I_{2,j}) &= \frac{a(a-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{(2n-2)(2n-3)} - \left(\frac{a(a-1)}{2n(2n-1)}\right)^2 = \\
&= \frac{(4n-3)a^2(a-1)^2}{4n^2(n-1)(2n-1)^2(2n-3)} \,.
\end{aligned}$$

*V dvojni vsoti je takih kovarianc $n(n-1)$. Sledi*

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= -n\left(\frac{a(a-1)}{2(2n-1)}\right)^2 + n(n-1)\cdot\frac{(4n-3)a^2(a-1)^2}{4n^2(n-1)(2n-1)^2(2n-3)} = \\ &= \frac{a^2(a-1)^2}{2n(2n-1)^2(2n-3)}\,,\end{aligned}$$

*kar je isto kot prej.*

Tretji način: *uporabimo indikatorje iz drugega načina rešitve prejšnje točke in nastavimo*

$$E(X_1X_2) = \sum_{1\le i_1<j_1\le a}\ \sum_{1\le i_2<j_2\le a} E(I_{1;i_1,j_1}I_{2;i_2,j_2})\,.$$

*Produkt $I_{k;i,j}$ lahko interpretiramo kot indikator dogodka, da imata $i_1$-ta in $j_1$-ta karta prvega igralca isto vrednost, prav tako pa imata isto vrednost tudi $i_2$-ta in $j_2$-ta karta drugega igralca. Spet imamo za $i_1$-to karto prvega igralca $2n$ možnosti in vse so ugodne, za njegovo $j_1$-to karto imamo $2n-1$ možnosti in le ena je ugodna, nakar imamo za $i_2$-to karto drugega igralca $2n-2$ možnosti in vse so ugodne, za $j_2$-to karto drugega igralca pa imamo $2n-3$ možnosti in le ena je ugodna. Torej je*

$$E(I_{1;i_1,j_1}I_{2;i_2,j_2}) = P(I_{1;i_1,j_1}=1, I_{2;i_2,j_2}=1) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}\,.$$

*Vseh četveric $(i_1, j_1, i_2, j_2)$, po katerih se sešteva, je $\binom{a}{2}^2 = \frac{a^2(a-1)^2}{4}$, torej je*

$$E(X_1X_2) = \frac{a^2(a-1)^2}{4(2n-1)(2n-3)}\,.$$

*Zaključimo tako kot pri prvem načinu.*

Četrti način: *delamo z indikatorji iz drugega načina rešitve točke a. in uporabimo bilinearnost kovariance:*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sum_{1\le i_1<j_1\le a}\ \sum_{1\le i_2<j_2\le a} \operatorname{cov}(I_{1;i_1,j_1}, I_{2,i_2,j_2})\,.$$

*Enako kot pri tretjem načinu izračunamo*

$$E(I_{1;i_1,j_1}I_{2;i_2,j_2}) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}\,,$$

*od koder sledi*

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_{1;i_1,j_1}, I_{2,i_2,j_2}) &= \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} - \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 = \\ &= \frac{2}{(2n-1)^2(2n-3)}\,.\end{aligned}$$

*Tako kot pri tretjem načinu je v dvojni vsoti* $\binom{a}{2}^2 = \frac{a^2(a-1)^2}{4}$ *kovarianc. Sledi*

$$\frac{a^2(a-1)^2}{2n(2n-1)^2(2n-3)}\,,$$

*kar je seveda spet isto kot prej.*

**3.** (20) Naj bodo $U, X, Y$ neodvisne z $U \sim U(0,1)$ in $X, Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja $\bigl(U, \sqrt{U}\,X, \sqrt{1-U}\,Y\bigr)$.

*Rešitev: preslikava*

$$\Phi(u,x,y) = \bigl(u, \sqrt{u}\,x, \sqrt{1-u}\,y\bigr)$$

*preslika* $(0,1)\times\mathbb{R}^2$ *bijektivno nase, njen inverz*

$$\Phi^{-1}(u,s,t) = \left(u, \frac{s}{\sqrt{u}}, \frac{t}{\sqrt{1-u}}\right)$$

*pa je parcialno zvezno odvedljiv z*

$$J_{\Phi^{-1}}(u,s,t) = \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,.$$

*Za* $(u,s,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}^2$ *je torej*

$$f_{U,S,T}(u,s,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}\,e^{-\frac{s^2}{2u}}\,e^{-\frac{t^2}{2(1-u)}}\,,$$

*sicer pa je* $f_{U,S,T}(u,s,t) = 0$.

b. (10) Izračunajte gostoto vektorja $\bigl(U, \sqrt{U}\,X + \sqrt{1-U}\,Y\bigr)$. Sta komponenti tega vektorja neodvisni?

*Rešitev:*

Prvi način: *definirajmo*

$$\Psi(u,s,t) = (u, s, s+t)\,.$$

*Velja*

$$\Psi^{-1}(u,v,w) = (u, v, w-s)$$

*in*

$$J_{\Psi^{-1}}(u,v,w) = 1\,.$$

*Dobimo*

$$f_{U,S,W}(u,s,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}\,e^{-\frac{s^2}{2u}}\,e^{-\frac{(w-s)^2}{2(1-u)}}\,.$$

*Gostoto slučajnega vektorja* $(U,W)$ *dobimo z integracijo po* $s$. *Za* $(u,w)\in(0,1)\times\mathbb{R}$ *izračunamo*

$$\begin{aligned} f_{U,W}(u,w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,S,W}(u,s,w)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}\,e^{-\frac{s^2}{2u}}\,e^{-\frac{(w-s)^2}{2(1-u)}}\,ds\,. \end{aligned}$$

*Dobljeni integral je konvolucija dveh normalnih gostot s pričakovano vrednostjo* 0 *in variancama* $u$ *in* $1-u$*, zato je rezultat gostota standardizirano normalne porazdelitve. Za* $(u, w) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ *je torej*

$$f_{U,W}(u, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{w^2}{2}} \,,$$

*sicer pa je* $f_{U,W}(u, w) = 0$*. Dobljena gostota se da izraziti kot produkt funkcije samo spremenljivke* $u$ *in funkcije samo spremenljivke* $w$*, zato sta komponenti neodvisni.*

Drugi način: *ker so* $U$*,* $X$ *in* $Y$ *neodvisne, je tudi slučajni vektor* $(X, Y)$ *neodvisen od* $U$*, torej se njegova pogojna gostota glede na* $U = u$ *ujema z brezpogojno: pogojno na* $U = u$ *sta* $X$ *in* $Y$ *neodvisni in standardni normalni. Slučajna spremenljivka* $Z := \sqrt{U}\, X + \sqrt{1-U}\, Y$ *pa je potem spet pogojno na* $U = u$ *porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo* 0 *in varianco* $u + (1-u) = 1$*, torej standardno normalno – (funkcijsko) neodvisno od* $u$*. Drugače povedano, pogojna gostota slučajne spremenljivke* $Z$ *glede na* $U = u$ *je gostota standardne normalne porazdelitve ne glede na* $U$*. Od tod pa sledi, da je slučajna spremenljivka* $Z$ *(verjetnostno) neodvisna od* $U$ *in tudi brezpogojno porazdeljena standardno normalno.*

**4.** (20) Naj bodo $X_1, \ldots, X_r$ neodvisne slučajne spremenljivke. Za $k = 1, 2, \ldots, r$ naj bo $X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda_k)$. Označimo $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$.

a. (10) Izračunajte $E(X_k^2 \mid S_r = n)$.

*Rešitev: Označimo*

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r \qquad \textit{in} \qquad p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}\,.$$

*Vemo, da sta slučajni spremenljivki $S_r \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in $S_r - X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda - \lambda_k)$ neodvisni. Za $0 \leq i \leq n$ torej velja*

$$P(X_k = i \mid S_r = n) = \frac{P(X_k = i, S_r - X_k = n - i)}{P(S_r = n)} = \binom{n}{i} p_k^i (1 - p_k)^{n-i}\,,$$

*kar pomeni, da je slučajna spremenljivka $X_k$ pogojno na $\{S_r = n\}$ porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(n, p_k)$. Torej velja*

$$E(X_k^2 \mid S_r = n) = np_k(1 - p_k) + n^2 p_k^2 = np_k + (n^2 - n)p_k^2\,.$$

b. (10) Za $k \neq l$ izračunajte $E(X_k X_l \mid S_r = n)$.

*Namig: oglejte si $E\big[(X_k + X_l)^2 \bigm| S_r = n\big]$.*

*Rešitev: slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_r$ izvzemši $X_k$ in $X_l$ ter vsota $X_k + X_l$ so neodvisne Poissonove slučajne spremenljivke z vsoto $S_r$. Iz prvega dela dobimo*

$$E\big[(X_k + X_l)^2 \bigm| S_r = n\big] = n(p_k + p_l) + (n^2 - n)(p_k + p_l)^2\,.$$

*Po drugi strani pa je zaradi linearnosti pogojne pričakovane vrednosti zgornji izraz enak*

$$E(X_k^2 \mid S_r = n) + 2E(X_k X_l \mid S_r = n) + E(X_l^2 \mid S_r = n)\,.$$

*Ko odštejemo zunanji pogojni pričakovani vrednosti, ki ju poznamo iz prejšnje točke, dobimo*

$$E(X_k X_l \mid S_r = n) = (n^2 - n)p_k p_l\,.$$

**5.** (20) Tri kobilice sedijo vsaka v svojem oglišču enakostraničnega trikotnika. Tik pred trenutki $n = 1, 2, \ldots$ se vsaka odloči, da skoči v eno od sosednjih oglišč. Vsako od oglišč izbere z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, neodvisno od ostalih dveh in neodvisno od prejšnjega dogajanja. Nekoč se bodo vse kobilice srečale v enem od oglišč. Naj bo $X$ trenutek, ko se to prvič zgodi. Naj bo $G_X$ rodovna funkcija slučajne spremenljivke $X$.

a. (10) Vzemimo alternativni začetek, ko najprej dve kobilici sedita v istem oglišču, ena pa v svojem; v nadaljevanju se obnašajo enako kot prej. Naj bo $Y$ trenutek, v katerem se v tem primeru srečajo v enem od oglišč. Označite z $G_Y(s)$ rodovno funkcijo slučajne spremenljivke $Y$. Poiščite vsaj eno netrivialno zvezo med rodovnima funkcijama $G_X(s)$ in $G_Y(s)$.

*Rešitev: po prvem koraku se lahko zgodi dvoje:*

*(i)* Vse kobilice so še vedno vsaka v svojem oglišču. *To se lahko zgodi na dva od osmih enako verjetnih načinov, torej z verjetnostjo* $\frac{1}{4}$.

*(ii)* Dve kobilici sta v istem oglišču, ena pa v svojem. *Verjetnost te možnosti je* $\frac{3}{4}$.

*Ker se dogajanje po vsaki izbiri začne na novo, formula za popolno pričakovano vrednost da*

$$E(s^X) = \tfrac{1}{4}s\,E(s^X) + \tfrac{3}{4}s\,E(s^Y)$$

*oziroma*

$$G_X(s) = \tfrac{1}{4}s\,G_X(s) + \tfrac{3}{4}s\,G_Y(s)\,.$$

*Alternativno pa lahko izhajamo tudi iz stanja, v katerem dve kobilici sedita v istem, ena pa v svojem oglišču. Tedaj se lahko po prvem skoku kobilice srečajo v istem oglišču, lahko sta dve v istem in ena v drugem, lahko pa je vsaka v svojem. Verjetnosti teh dogodkov so po vrsti* $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$ *in* $\frac{2}{8}$. *Sledi*

$$E(s^Y) = \tfrac{1}{8}s + \tfrac{5}{8}s\,E(s^Y) + \tfrac{1}{4}s\,E(s^X)$$

*oziroma*

$$G_Y(s) = \tfrac{1}{8}s + \tfrac{5}{8}s\,G_Y(s) + \tfrac{1}{4}s\,G_X(s)\,.$$

b. (10) Izpeljite, da je rodovna funkcija $G_X$ oblike

$$G_X(s) = cs^2\left(\frac{1}{a-s} + \frac{1}{b+s}\right)$$

za neke konstante $a$, $b$ in $c$. Izračunajte jih in z njimi izrazite porazdelitev slučajne spremenljivke $X$.

*Rešitev: Obe prej dobljeni zvezi za rodovni funkciji dasta*

$$G_X(s) = \frac{3s^2}{32 - 28s - s^2}\,.$$

*Imenovalec ima ničli* $a$ *in* $-b$*, kjer je* $a = -14 + 2\sqrt{57}$ *in* $b = 14 + 2\sqrt{57}$*. Sledi*

$$G_X(s) = \frac{3s^2}{(a-s)(b+s)}\,.$$

*Po razbitju na parcialne ulomke dobimo*

$$G(s) = \frac{3}{a+b}\, s^2 \left(\frac{1}{a-s} + \frac{1}{b+s}\right)\,,$$

*torej je* $c = 3/(a+b) = \frac{3}{4\sqrt{57}}$*. Iz analize prikličemo, da je*

$$\frac{1}{a-s} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{a}\right)^k$$

*za* $|s| < a$ *in*

$$\frac{1}{b+s} = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{s}{b}\right)^k$$

*za* $|s| < b$*. Od tod razberemo, da je*

$$P(X = k) = c\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1} + (-1)^k\left(\frac{1}{b}\right)^{k-1}\right]\,.$$

*za* $k = 2, 3, \ldots$ *Sicer je seveda* $P(X = k) = 0$*.*

**6.** (20) V posodi so sprva dve beli in ena rdeča kroglica. Na vsakem koraku na slepo izvlečemo eno kroglico, jo vrnemo v posodo in dodamo še eno kroglico enake barve, kot je bila izvlečena. To delamo, dokler se prvič ne zgodi, da izvlečemo $n$ kroglic iste barve (ne nujno zaporedoma), kjer je $n$ izbrano naravno število.

a. (15) Določite porazdelitev števila vlečenj. Verjetnosti zapišite v zaključeni obliki, le s pomočjo seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja.

*Rešitev: naj bo $X$ število vlečenj. Ta slučajna spremenljivka lahko zavzame vrednosti $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Za $k$ iz te množice je dogodek $\{X = k\}$ disjunktna unija dogodkov*

$$B_k = \big\{\textit{pred } k\textit{-tim vlečenjem izvlečemo natanko } n-1 \textit{ belih kroglic,} \\ \textit{nakar tudi v } k\textit{-tem vlečenju izvlečemo belo}\big\}$$

*in*

$$R_k = \big\{\textit{pred } k\textit{-tim vlečenjem izvlečemo natanko } n-1 \textit{ rdečih kroglic,} \\ \textit{nakar tudi v } k\textit{-tem vlečenju izvlečemo rdečo}\big\}\,.$$

*Verjetnost dogodka, da v prvih $n-1$ vlečenjih izvlečemo belo kroglico, v nadaljnjih $k-n$ vlečenjih rdečo, v $k$-tem pa spet belo kroglico, je enaka*

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \frac{2}{n+3} \cdots \frac{k-n}{k+1} \cdot \frac{n+1}{k+2} = 2 \cdot \frac{(n+1)!\,(k-n)!}{(k+2)!}$$

*To pa je tudi verjetnost dogodka, da v* poljubnih *vnaprej predpisanih $n-1$ vlečenjih izmed prvih $k-1$ vlečenj izvlečemo belo kroglico, v preostalih izmed prvih $k-1$ vlečenj rdečo kroglico, v $k$-tem vlečenju pa spet belo kroglico. Sledi*

$$P(B_k) = 2\binom{k-1}{n-1}\frac{(n+1)!\,(k-n)!}{(k+2)!} = \frac{2n(n+1)}{k(k+1)(k+2)}\,.$$

*Podobno je verjetnost dogodka, da v prvih $n-1$ vlečenjih izvlečemo rdečo kroglico, v nadaljnjih $k-n$ vlečenjih belo, v $k$-tem pa spet rdečo kroglico, je enaka*

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdots \frac{k-n+1}{k+1} \cdot \frac{n}{k+2} = 2 \cdot \frac{n!\,(k-n+1)!}{(k+2)!}$$

*in podobno kot prej dobimo*

$$P(R_k) = 2\binom{k-1}{n-1}\frac{n!\,(k-n+1)!}{(k+2)!} = \frac{2n(k-n+1)}{k(k+1)(k+2)}\,.$$

*Za $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$ je torej*

$$P(X = k) = P(B_k) + P(R_k) = \frac{2n}{k(k+1)}\,,$$

*medtem ko za preostale $k$ velja $P(X = k) = 0$.*

b. (5) Recimo, da smo potrebovali maksimalno število vlečenj. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo izvlekli $n$ rdečih kroglic?

*Rešitev: iskana pogojna verjetnost je enaka*

$$P(R_{2n-1} \mid X = 2n-1) = \frac{P(R_{2n-1})}{P(X = 2n-1)} = \frac{n}{2n+1}\,.$$

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

Pisni izpit

4. februar 2025

## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | • | • | • | • | |

**2.** (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 5$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; privzamemo, da so vse kocke standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Označimo z $X$ število kockarjev, ki vržejo enako kot oba soseda, z $Y$ pa število kockarjev, ki vržejo strogo več od obeh sosedov.

a. (10) Izračunajte $E(X)$ in $E(Y)$.

*Rešitev: velja $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$ in $Y = \sum_{l=1}^{n} J_l$, kjer je*

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če } k\textit{-ti kockar vrže enako kot oba soseda} \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$$

*in*

$$J_l = \begin{cases} 1 & \textit{če } l\textit{-ti kockar vrže strogo več od obeh sosedov} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

*Če s $T_k$ označimo število pik, ki jih je vrgel $k$-ti kockar, za $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ velja*

$$E(I_k \mid T_k = j) = P(I_k = 1 \mid T_k = j) = \frac{1}{36}$$

*in*

$$E(J_l \mid T_k = j) = P(J_l = 1 \mid T_k = j) = \frac{(j-1)^2}{36}\,.$$

*Sledi*

$$E(I_k) = \frac{1}{36} \qquad \textit{in} \qquad E(J_l) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{216} = \frac{55}{216}$$

*ter končno*

$$E(X) = \frac{n}{36} \qquad \textit{in} \qquad E(Y) = \frac{55n}{216}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{cov}(X, Y)$.

*Rešitev: zaradi bilinearnosti je*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{cov}(I_k, J_l)\,.$$

*Če indeksa $k$ in $l$ predstavljata ista ali pa sosednja kockarja, je $I_k I_l = 0$, torej je $\operatorname{cov}(I_k, J_l) = -E(I_k)\,E(J_l) = -\frac{55}{7776}$. Takih parov $(i, j)$ je $3n$. Če pa za indeksa $k$ in $l$ to ne drži, opazimo, da, če s $T_l'$ oziroma $T_l''$ označimo število pik levega oziroma desnega soseda $l$-tega kockarja, za poljubne $j, j', j'' = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ velja*

$$E(I_k \mid T_l = j, T_l' = j', T_l'' = j'') = P(I_k = 1 \mid T_l = j, T_l' = j', T_l'' = j'') = \frac{1}{36}\,.$$

*To velja tudi, če imata $k$-ti in $l$-ti kockar enega skupnega soseda. To pa pomeni, da je dogodek $\{I_k = 1\}$ neodvisen od dogodka $\{T_l = j, T_l' = j', T_l'' = j''\}$. Ker je dogodek*

$\{J_l = 1\}$ *disjunktna unija takih dogodkov, je dogodek* $\{I_k = 1\}$ *neodvisen tudi od dogodka* $\{J_l = 1\}$*. Z drugimi besedami, slučajni spremenljivki* $I_k$ *in* $J_l$ *sta neodvisni, kar pomeni, da je* $\operatorname{cov}(I_k, J_l) = 0$*. Sledi*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -3n \cdot \frac{55}{7776} = -\frac{55n}{2592}\,.$$

**6.** (20) Pošteno kocko mečemo, dokler se ne zgodi tako, da pade šestica, kot tudi, da padeta dve petici. Posamezni meti so neodvisni.

a. (10) Zapišite porazdelitev števila potrebnih metov.

*Rešitev: Označimo število metov z $X$. Dogodek $\{X = n\}$ se lahko zgodi za $n = 3, 4, 5, \ldots$, in sicer na naslednja dva načina:*

- *V $n$-tem metu pade šestica, prej pa šestica ne pade, obenem pa padeta vsaj dve petici; označimo ta dogodek z $A_n$.*
- *V $n$-tem metu pade petica, prej pa pade natanko ena petica in vsaj ena šestica; označimo ta dogodek z $B_n$.*

*Velja*

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} - (n-1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}\right]\cdot\frac{1}{6}\,,\\
P(B_n) &= (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}\right],\\
P(X = n) &= P(A_n) + P(B_n)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] + (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right].
\end{aligned}$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da druga petica pade kasneje kot edina šestica?

*Pomoč: za $|q| < 1$ velja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.*

*Rešitev: Iskana verjetnost je enaka*

$$p := \sum_{n=3}^{\infty} P(B_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}\right].$$

*Opazimo, da je seštevanec za $n = 2$ enak nič, torej je tudi*

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left[\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]\\
&= \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$