FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Verjetnost

Pisni izpit

1. februar 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

REŠITVE

1. (20) Dana sta dva identična kupa n kart z oznakami od 1 do n. Kupa združimo, novi kup dobro premešamo, nakar razdelimo karte po dve in dve. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ definirajmo

$$A_k = \{\text{oznaki pri } k\text{-tem paru kart se ujemata}\}\,.$$

a. (15) Za $k = 1, 2, \ldots, n$ izračunajte $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$.

Rešitev:

Prvi način. *Zamislimo si, da drugo za drugo izbiramo karte, ki bodo v prvih k parih. Za prvo karto v prvem paru imamo $2n$ možnosti in vse so ugodne, za drugo pa imamo $2n-1$ možnosti, od katerih je le ena ugodna. Za prvo karto v drugem paru imamo $2n-2$ možnosti, od katerih so spet vse ugodne, za drugo pa $2n-3$ možnosti, od katerih je le ena ugodna. Tako nadaljujemo: za prvo karto v k-tem paru imamo $2n-2k+2$ možnosti in vse so ugodne, za drugo pa imamo $2n-2k+1$ možnosti in le ena je ugodna. Sledi*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}\,.$$

Drugi način. *Za izide vzamemo kar vseh možnih $(2n)!$ razporeditev kart v združenem kupu. Ugodne izide preštejemo tako, da najprej izberemo, katere oznake kart bodo v prvih k parih. Za to imamo $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ možnosti. Nato za te pare izberemo, katera izmed dveh kart z izbrano oznako bo na katerem mestu. Za to imamo 2^k možnosti. Končno izberemo še vrstni red preostalih $2n-2k$ kart, za kar imamo $(2n-2k)!$ možnosti. Sledi*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{n!\,(2n-2k)!\,2^k}{(n-k)!\,(2n)!} = 2^k\,\frac{\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{2n}{n}}\,\frac{(n-k)!}{n!}\,.$$

Krajši račun pokaže, da oba izraza dasta isto vrednost.

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da se oznaki ne ujemata pri nobenem od parov? Vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: po formuli za vključitve in izključitve je

$$P(\textit{oznaki se ujemata pri vsaj enem paru}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} p_k\,,$$

kjer je $p_k = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ (zaradi simetrije so verjetnosti vseh presekov k dogodkov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ enake). Če definiramo še $p_0 = 1$ (kar je smiselno in se ujema z izražavo verjetnosti iz prejšnje točke), sledi

$$P(\textit{oznaki se ne ujemata pri nobenem paru}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} p_k\,.$$

2. (20) V posodi je b belih in r črnih kroglic. Kroglice izbiramo drugo za drugo na slepo in brez vračanja.

a. (10) Naj bo M število izbranih kroglic do vključno prve bele. Za $k = 1, 2, \ldots, r+1$ izračunajte $P(M = k)$.

Rešitev: dogodek $\{M = k\}$ se zgodi, če v prvih $k-1$ vlečenjih izvlečemo črno, v k-tem vlečenju pa belo kroglico. Njegova verjetnost je tako enaka

$$\begin{aligned}
P(M = k) &= \frac{r(r-1)\cdots(r-k+2)}{(2r)(2r-1)\cdots(2r-k+2)} \cdot \frac{r}{2r-k+1} \\
&= \frac{\binom{r}{k-1}}{\binom{2r}{k-1}} \cdot \frac{r}{2r-k+1} \\
&= \frac{\binom{2r-k}{r-1}}{\binom{2r}{r}} \\
&= \frac{r!\, r\, (2r-k)!}{(2r)!\, (r-k+1)!} \,.
\end{aligned}$$

b. (10) Naj bo N število izbranih kroglic, dokler ne izvlečemo vseh r belih ali pa vseh r črnih kroglic. Za $k = r, r+1, \ldots, 2r-1$ izračunajte $P(N = k)$.

Rešitev: dogodek $\{N = k\}$ se zgodi, če v prvih $k-1$ vlečenjih izvlečemo $r-1$ kroglic določene barve, nakar v k-tem vlečenju spet izvlečemo kroglico te barve. Možni barvi sta dve. Iskana verjetnost je tako enaka

$$\begin{aligned}
P(N = k) &= 2 \cdot \frac{\binom{r}{r-1}\binom{r}{k-r}}{\binom{2r}{k-1}} \cdot \frac{1}{2r-k+1} \\
&= \frac{2r}{2r-k+1} \cdot \frac{\binom{r}{k-r}}{\binom{2r}{k-1}} \\
&= \frac{2\binom{k-1}{r-1}}{\binom{2r}{r}} \\
&= \frac{r!\,(k-1)!}{(2r-1)!\,(k-r)!} \,.
\end{aligned}$$

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta skupno porazdeljeni zvezno z gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & ;\ x,y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Definirajmo slučajni vektor

$$(U,V) = \left(X^2 + Y^2,\ \frac{Y^2}{X^2+Y^2} \right) .$$

a. (10) Poiščite gostoto slučajnega vektorja (U,V).

Rešitev: preslikava

$$\Phi(x,y) = \left(x^2 + y^2,\ \frac{y^2}{x^2+y^2} \right)$$

območje $G = \{(x,y) \colon x,y > 0\}$ *bijektivno preslika na območje* $H = (0,\infty) \times (0,1)$ *in ima inverz*

$$\Phi^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{u(1-v)}\,,\ \sqrt{uv} \right) .$$

Preslikavi Φ *in* Φ^{-1} *sta obe parcialno zvezno odvedljivi in velja*

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-v}}{2\sqrt{u}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{1-v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-v}}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} .$$

Transformacijska formula nam da iskano gostoto

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, e^{-u/2} & ;\ (u,v) \in H \\ 0 & ;\ \textit{sicer.} \end{cases}$$

b. (10) Sta U in V neodvisni? Kako sta porazdeljeni?

Rešitev: Gostota na množici H *razpade na produkt funkcije samo spremenljivke* u *in funkcije samo spremenljivke* v*. Ker je* H *kartezijski produkt intervalov, lahko za gostoto to rečemo tudi globalno, kar pomeni, da sta* U *in* V *res neodvisni. Iz delov gostote razberemo* $U \sim \exp(1/2)$ *in* $V \sim \mathrm{Beta}(1/2, 1/2)$*.*

4. (20) Naj bo $X \sim \mathrm{Bin}\big(n, \frac{1}{2}\big)$, m naravno število, Y pa naj bo celoštevilska slučajna spremenljivka, za katero je

$$P\left(Y = l \mid X = k\right) = \binom{m}{l}\left(\frac{k}{n}\right)^{l}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-l}$$

za vse $0 \le l \le m$, pri čemer razumemo, da je $0^0 = 1$.

a. (10) Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: razberemo, da je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke Y glede na $\{X = k\}$ binomska $\mathrm{Bin}\big(m, \frac{k}{n}\big)$*, od koder sledi*

$$E(Y \mid X = k) = \frac{mk}{n}\,.$$

Po izreku o popolni pričakovani vrednosti je

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} E(Y \mid X = k)\, P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{mk}{n}\, P(X = k) \\ &= \frac{m}{n} \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k) \\ &= \frac{m}{n}\, E(X) \\ &= \frac{m}{2}\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(Y)$.

Rešitev: najprej izračunajmo $E(Y^2)$. Velja

$$E(Y^2 \mid X = k) = m \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{m^2 k^2}{n^2}\,.$$

in spet po izreku o popolni pričakovani vrednosti je

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{k=0}^{n} E(Y^2 \mid X = k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[m \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{m^2 k^2}{n^2} \right] P(X = k) \\ &= \frac{m}{n^2}\, E\big[X(n - X)\big] + \frac{m^2}{n^2}\, E(X^2) \\ &= \frac{m}{n}\, E(X) + \frac{m^2 - m}{n^2}\, E(X^2)\,. \end{aligned}$$

Iz

$$E(X^2) = \mathrm{var}(X) + \big(E(X)\big)^2 = \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\,.$$

nadalje dobimo

$$E(Y^2) = \frac{m}{2} + \frac{(m^2 - m)(n+1)}{4n}\,.$$

Končno je

$$\mathrm{var}(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{m^2 + mn - m}{4n}\,.$$

5. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ in N neodvisne slučajne spremenljivke in $\lambda > 0$. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ naj bodo enako porazdeljene, slučajna spremenljivka N pa naj ima Poissonovo porazdelitev Pois(λ), tj.

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\,.$$

Nadalje je znano, da je porazdelitev slučajne spremenljivke $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ podana s predpisom

$$P(S = k) = \frac{1}{2^{k+1}}\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a. (15) Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ za $\lambda = 1$.

Rešitev: označimo z G_X rodovno funkcijo slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$, z G_N rodovno funkcijo slučajne spremenljivke N, z G_S pa rodovno funkcijo slučajne spremenljivke S. Vemo, da je $G_S(s) = G_N(G_X(s))$. S seštetjem ustreznih vrst dobimo

$$G_N(s) = e^{s-1} \quad \textit{in} \quad G_S(s) = \frac{1}{2-s}\,.$$

Torej mora veljati

$$e^{G_X(s)-1} = \frac{1}{2-s}\,,$$

od koder dobimo

$$G_X(s) = 1 - \ln(2-s) = 1 - \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{s}{2}\right) = 1 - \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k \cdot 2^k}\,.$$

Torej za $i = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$P(X_i = 0) = 1 - \ln 2\,, \qquad P(X_i = k) = \frac{1}{k \cdot 2^k}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

b. (5) Za katere λ sploh obstajajo takšne slučajne spremenljivke?

Rešitev: Zdaj mora veljati

$$e^{\lambda(G_X(s)-1)} = \frac{1}{2-s}\,,$$

od koder dobimo

$$G_X(s) = 1 - \frac{\ln(2-s)}{\lambda} = 1 - \frac{\ln 2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k \cdot 2^k}\,.$$

Očitno je $G_X(1) = 1$, vsi koeficienti pa bodo nenegativni natanko tedaj, ko bo $\lambda \geq \ln 2$: to je potreben in zadosten pogoj za obstoj zahtevanih slučajnih spremenljivk.

6. (20) Mečemo pošten kovanec, meti so neodvisni. V vsakem metu lahko pade grb (G) ali številka (Š). Naj bo A_n dogodek, da se vzorec ŠŠ v prvih n metih **ne** pojavi. Označimo $p_n = P(A_n)$.

a. (5) Definirajmo

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{v prvem metu pade grb (G)}\} \\ B_2 &= \{\text{v prvih dveh metih pade ŠG}\} \\ B_3 &= \{\text{v prvih dveh metih pade ŠŠ}\} \end{aligned}$$

Utemeljite, da, če postavimo $p_0 = p_1 = 1$, za $n \geq 2$ velja

$$\begin{aligned} P(A_n \mid B_1) &= p_{n-1} \\ P(A_n \mid B_2) &= p_{n-2} \\ P(A_n \mid B_3) &= 0\,. \end{aligned}$$

Rešitev: tretja enakost sledi neposredno iz definicije dogodkov A_n ter B_1, B_2 in B_3. Prav tako iz definicije dogodkov A_n ter dodatnih vrednosti p_0 in p_1 sledita prva enakost za $n = 2$ in druga enakost za $n = 2, 3$. Prva enakost za $n \geq 3$ pa sledi iz dejstva, da se dogodek A_{n-1} na dogodku B_1 ujema z dogodkom, da se v metih od drugega do n-tega ne pojavi vzorec ŠŠ, in neodvisnosti metov. Podobno utemeljimo tudi drugo enakost za $n \geq 4$.

b. (15) Pokažite, da je

$$p_n = \frac{1}{2}\, p_{n-1} + \frac{1}{4}\, p_{n-2}$$

in nadalje z indukcijo, da je

$$p_n = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(a^{n+2} - b^{n+2}\right) ,$$

kjer je

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{in} \qquad b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}\,.$$

Namig: lahko uporabite, da a in b rešita enačbo $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

Rešitev: dogodki B_1, B_2 in B_3 tvorijo popoln sistem ter imajo verjetnosti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{4}$. Prva formula je tako izrek o popolni verjetnosti:

$$P(A_n) = P(B_1)\, P(A_n \mid B_1) + P(B_2)\, P(A_n \mid B_2) + P(B_3)\, P(A_n \mid B_3)\,.$$

Za drugo formulo, ki jo moramo dokazati z indukcijo, pa najprej preprost račun pokaže, da je pravilna za $n = 0, 1$. Privzemimo, da je formula pravilna do vključno n, in izračunajmo

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}\, p_n + \frac{1}{4}\, p_{n-1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}\, a^{n+2} + \frac{1}{4}\, a^{n+1} - \frac{1}{2}\, b^{n+2} - \frac{1}{4}\, b^{n+1} \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left(a^{n+1} \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) - b^{n+1} \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left(a^{n+3} - b^{n+3} \right) ; \end{aligned}$$

zadnja enakost sledi iz dejstva, da a in b rešita enačbo iz namiga. Indukcijski korak je s tem zaključen.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Pedagoška matematika

Verjetnost

Pisni izpit

1. februar 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, 5 rešenih nalog pa je že 100%. Na razpolago imate 165 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj	•	•	•	•	

REŠITVE

6. (20) Za okroglo mizo naključno posadimo b belih in r rdečih vitezov, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Naj bo X število belih vitezov za mizo, ki imajo na svoji desni belega viteza.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev:

Prvi način. *Stole za mizo lahko oštevilčimo v smeri, nasprotni urinemu kazalcu. Označimo $n = b + r$ in definirajmo indikatorje*

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \text{če na } k\text{-tem } (k+1)\text{-tem stolu sedita bela viteza.} \\ 0\,, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Pri tem razumemo stol z indeksom $n+1$ kot stol 1. S to definicijo je $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$. Ker so vsi vrstni redi enako verjetni, bosta viteza na k-tem in $(k+1)$-tem stolu naključno izbrana. Verjetnost, da bosta oba bela, je

$$P(I_k = 1) = E(I_k) = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}$$

in posledično

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(I_k) = \frac{b(b-1)}{n-1} = \frac{b(b-1)}{b+r-1}\,.$$

Drugi način. *Oštevilčimo bele viteze s števili od 1 do b in definirajmo indikatorje*

$$J_k = \begin{cases} 1\,, & \text{če desno od } k\text{-tega belega viteza sedi beli vitez.} \\ 0\,, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tedaj je $X = \sum_{k=1}^{b} J_k$. Ko je k-ti beli vitez poseden, so pogojno na njegov položaj vsi vrstni redi preostalih enako verjetni. Torej je

$$P(J_k = 1) = E(J_k) = \frac{b-1}{n-1}$$

in posledično

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(J_k) = \frac{b(b-1)}{n-1} = \frac{b(b-1)}{b+r-1}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$. Dobljenih izrazov vam ni treba prekomerno poenostavljati.

Rešitev:

Prvi način. *Uporabimo indikatorje iz prvega načina rešitve točke a. in zapišemo*

$$E(X^2) = \sum_{1 \le k,l \le n} E(I_k I_l)\,.$$

Za $k = l$ je seveda

$$E(I_k I_l) = E(I_k) = \frac{b(b-1)}{n(n-1)}\,;$$

takih členov je n. Pri $k \neq l$ pa ločimo primera, ko sta stola k in l sosedna in ko stola nista sosedna. V prvem primeru je

$$E(I_k I_l) = \frac{\binom{b}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{b(b-1)(b-2)}{n(n-1)(n-2)}\,,$$

ker morajo biti trije vitezi zapovrstjo beli. Takih parov je $2n$. V drugem primeru pa je

$$E(I_k I_l) = \frac{\binom{b}{4}}{\binom{n}{4}} = \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

ker morajo biti vitezi na štirih stolih beli. Takih parov je $n(n-3)$. Sestavimo in dobimo

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{b(b-1)}{n-1)} + \frac{2b(b-1)(b-2)}{(n-1)(n-2)} + \frac{b(b-1)(b-2)}{(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{b(b-1)\big[n-2+2(b-2)+(b-2)(b-3)\big]}{(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{b(b-1)(b^2+n-3b)}{(n-1)(n-2)}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= E(X^2) - \big[E(X)\big]^2 \\
&= \frac{b(b-1)\big[(n-1)(b^2+n-3b)-(n-2)b(b-1)\big]}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{b(b-1)(n^2+b^2-2nb-n+b)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{b(b-1)(n-b)(n-b-1)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{b(b-1)r(r-1)}{(b+r-1)^2(b+r-2)}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. *Prav tako uporabimo indikatorje iz prvega načina rešitve točke a., le da zapišemo*

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(I_k) + \sum_{\substack{1\le k,l\le n\\ k\neq l}} \mathrm{cov}(I_k, I_l)\,.$$

Vse variance so enake

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(I_k) &= E(I_k) - \big[E(I_k)\big]^2 \\ &= \frac{b(b-1)}{n(n-1)} - \frac{b^2(b-1)^2}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{b(b-1)(n^2-n-b^2+b)}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{n(b-1)(n-b)(n+b-1)}{n^2(n-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Pri kovariancah spet ločimo primera, ko sta stola k in l sosedna in ko stola nista sosedna. Iz pričakovanih vrednosti $E(I_kI_l)$, izračunanih v prvem načinu, v primeru, ko sta stola sosedna, dobimo

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_k, I_l) &= \frac{b(b-1)(b-2)}{n(n-1)(n-2)} - \frac{b^2(b-1)^2}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{b(b-1)\big[n(n-1)(b-2) - b(b-1)(n-2)\big]}{n^2(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)(n-b)(nb-2n-2b+2)}{n^2(n-1)^2(n-2)}\,;\end{aligned}$$

takih kovarianc je $2n$. Če pa stola nista sosedna, je

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_k, I_l) &= \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} - \frac{b^2(b-1)^2}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{b(b-1)\big[n(n-1)(b-2)(b-3) - b(b-1)(n-2)(n-3)\big]}{n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{b(b-1)(n-b)(-4nb+6n+6b-6)}{n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}\,;\end{aligned}$$

takih kovarianc je $n(n-3)$. Sestavimo in dobimo

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) &= \frac{b(b-1)(n-b)}{n(n-1)^2(n-2)}\Big[(n+b-1)(n-2) + 2nb - 4n - 4b + 4 - \\ &\qquad - 4nb + 6n + 6n - 6\Big] \\ &= \frac{b(b-1)(n-b)(n-1-b)}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)r(r-1)}{(b+r-1)^2(b+r-2)}\,.\end{aligned}$$

Tretji način. *Uporabimo indikatorje iz drugega načina rešitve točke a. in zapišemo*

$$E(X^2) = \sum_{1 \le k, l \le b} E(J_kJ_l)\,.$$

Za $k = l$ je seveda
$$E(J_k J_l) = E(J_k) = \frac{b-1}{n-1}\,;$$
Pri $k \neq l$ pa moramo izračunati verjetnost, da imata k-ti in l-ti beli vitez oba na desni bela viteza. Pri $k \neq l$ pa je smiselno ločiti dve možnosti: če z A_{kl} označimo dogodek, da sta k-ti in l-ti beli vitez soseda, velja
$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{n-1}\,, & E(J_k J_l \mid A_k) &= \frac{b-2}{n-2}\,, \\ P(A^c) &= \frac{n-3}{n-1}\,, & E(J_k J_l \mid A_k) &= \frac{(b-2)(b-3)}{(n-2)(n-3)} \end{aligned}$$
in po izreku o popolni pričakovani vrednosti je
$$\begin{aligned} E(J_k J_l) &= \frac{2}{n-1} \cdot \frac{b-2}{n-2} + \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{(b-2)(b-3)}{(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{2(b-2) + (b-2)(b-3)}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{(b-1)(b-2)}{(n-1)(n-2)}\,. \end{aligned}$$
Poberemo skupaj in dobimo
$$\begin{aligned} E(X^2) &= b \cdot \frac{b-1}{n-1} + b(b-1) \cdot \frac{(b-1)(b-2)}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)\big[n-2+(b-1)(b-2)\big]}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)(b^2+n-3b)}{(n-1)(n-2)}\,, \end{aligned}$$
od koder tako kot pri prvem načinu sledi
$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \big[E(X)\big]^2 = \frac{b(b-1)r(r-1)}{(b+r-1)^2(b+r-2)}\,.$$
Četrti način. *Prav tako uporabimo indikatorje iz drugega načina rešitve točke a., le da podobno kot pri drugem načinu zapišemo*
$$\mathrm{var}(X) = \sum_{k=1}^{b} \mathrm{var}(J_k) + \sum_{\substack{1 \le k,l \le b \\ k \neq l}} \mathrm{cov}(J_k, J_l)\,.$$
Vse variance so enake
$$\mathrm{var}(J_k) = E(J_k) - \big[E(J_k)\big]^2 = \frac{b-1}{n-1} - \frac{(b-1)^2}{(n-1)^2} = \frac{(b-1)(n-b)}{(n-1)^2}\,.$$

Kovariance dobimo iz pričakovanih vrednosti $E(J_k J_l)$*, ki so izračunane v tretjem načinu:*

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_k, I_l) &= \frac{(b-1)(b-2)}{(n-1)(n-2)} - \frac{(b-1)^2}{(n-1)^2} \\ &= \frac{(b-1)\big[(n-1)(b-2) - (b-1)(n-2)\big]}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= -\frac{(b-1)(n-b)}{(n-1)^2(n-2)}\,.\end{aligned}$$

Sestavimo in dobimo

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) &= b\,\frac{(b-1)(n-b)}{(n-1)^2} - b(b-1)\cdot\frac{(b-1)(n-b)}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)(n-b)(n-b-1)}{(n-1)^2(n-2)} \\ &= \frac{b(b-1)r(r-1)}{(b+r-1)^2(b+r-2)}\,.\end{aligned}$$