Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

31. avgust 2018

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bodo $Z, W_1, W_2, \ldots, W_n$ med sabo neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke. Definirajte
$$X_k = Z + W_k$$
za $k = 1, 2, \ldots, n$. Izračunajte $E(Z|X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   Namig: inverz matrike oblike $\mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ *je oblike* $\mathbf{I} + c\mathbf{1}\mathbf{1}^T$.

2. Vektorji (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) in (Z, Y, X) naj imajo vsi enako porazdelitev. Izračunajte
$$E\left(X|X + Y + Z\right) .$$
Skrbno utemeljite korake.

3. Statistik dobi v roke kovanec. Ve, da je verjetnost grba ali 0,49 ali 0,51, vendar ne ve, katera od teh dveh. Odloči se, da bo kovanec vrgel $n = 10.001$-krat. Če bo delež grbov manjši od 0,5, bo rekel, da je verjetnost grba 0,49, sicer pa bo rekel, da je verjetnost grba 0,51. Navedite približno verjetnost, da se bo statistik odločil prav.

4. Naj opazovane vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Pokažite, da lahko cenilko parametra σ, dano s
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2},$$
popravite tako, da bo nepristranska.

   Namig: razmišljajte o porazdelitvi statistike $\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2$.

5. Opazovane vrednosti $x_1, \ldots, x_{1000}$ nastanejo kot med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_{1000}$ z $X_k \sim \exp(\lambda)$ za $k = 1, \ldots, 1000$ in $\lambda > 0$. Preizkusiti želimo domnevo

$$H_0\colon \lambda = 1 \quad \text{proti} \quad H_1\colon \lambda \neq 1\,.$$

Naj bo $\bar{X}$ vzorčno povprečje. Pri stopnji tveganja $\alpha = 0{,}01$ si za kritično območje izberemo unijo $\{\bar{X} < 0{,}9207352\} \cup \{\bar{X} > 1{,}0836885\}$. Ocenite verjetnost napake tipa II v primeru, ko je $\lambda = 1{,}1$.

6. Predpostavite, da opazovane vrednosti $y_1, \ldots, y_n$ in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ izhajajo iz regresijskih modelov

$$Y_k = \alpha + \beta x_k + \epsilon_k \quad \text{in} \quad Z_k = \gamma + \beta w_k + \eta_k\,,$$

kjer so $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \eta_1, \ldots \eta_n$ vse nekorelirane s pričakovano vrednostjo 0 in enako varianco σ^2. Predpostavite, da je $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n w_k = 0$. Poiščite najboljšo nepristransko linearno cenilko razlike $\alpha - \gamma$.