Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

Teoretični izpit

30. junij 2017

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 10, ocena pa je enaka navzgor zaokroženemu številu pravilnih odgovorov. Ko je ponujenih več možnosti, je lahko pravilnih odgovorov več. Ko ni ponujenih odgovorov, na kratko pojasnite vaš razmislek.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Skupaj	

1. Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen bivariatno normalno z

$$E(X) = E(Y) = 0\,, \quad \mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = 1 \quad \text{in} \quad \mathrm{cov}(X, Y) = \rho \in (-1, 1)\,.$$

Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = \big(\sqrt{1-\rho} + \sqrt{1+\rho}\big)X + \big(\sqrt{1-\rho} - \sqrt{1+\rho}\big)Y$$

in

$$V = \big(\sqrt{1-\rho} - \sqrt{1+\rho}\big)X + \big(\sqrt{1-\rho} + \sqrt{1+\rho}\big)Y$$

neodvisni.

2. Naj bosta $\mathbf{H}$ in $\mathbf{K}$ simetrični idempotentni matriki, za kateri je $\mathbf{HK} = \mathbf{K}$. Naj bo $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Utemeljite, da sta slučajni spremenljivki

$$U = \mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z} \quad \text{in} \quad V = \mathbf{Z}^T\left(\mathbf{H} - \mathbf{K}\right)\mathbf{Z}$$

neodvisni, in navedite porazdelitev slučajne spremenljivke V. Navedba naj vsebuje tudi število prostostnih stopenj.

3. Naj bo $\mathbf{Q}$ ortogonalna matrika s stolpci $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$. Naj bo $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}\left(0, \mathbf{I}\right)$. Definirajte

$$U_i = \mathbf{q}_i^T\mathbf{Z}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$. Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke

$$U_1^2 + \cdots + U_k^2$$

za $k \leq n$.

4. Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke. Definirajte $S_0 = 0$ in $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Predpostavite, da je $E(X_k) = 0$ in $E(X_k^2) < \infty$ za vse $k = 1, \ldots, n$. Pokažite, da velja

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} S_{k-1} X_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[S_{k-1}^2\right] E\left[X_k^2\right] .$$

   Namig: v primernem trenutku poglejte pogojno na $X_1, \ldots, X_{k-1}$.

5. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki z $E(X^2) < \infty$ in $E(Y^2) < \infty$. Pokažite, da je

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}\big(X, E(Y|X)\big) .$$

6. Naj opazovane vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nastanejo kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Pokažite, da lahko cenilko parametra σ, dano z

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2} ,$$

   popravite tako, da bo nepristranska.

   Namig: razmišljajte o porazdelitvi statistike $\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2$. Kako se le-ta spreminja z μ in σ?

7. Predpostavite, da so podatki $x_1, \ldots, x_n$ nastali kot med sabo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ s porazdelitvijo $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$. Predlagajte nepristransko cenilko količine $\gamma = \mu^2$. Utemeljite vaše trditve.

8. Predpostavljamo, da so opazovane vrednosti nastale kot neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$, enakomerno porazdeljene na intervalu $(0, a)$ za $a > 0$. Testirati želimo domnevo

$$H_0\colon a = 1 \quad \text{proti} \quad H_1\colon a = 2\,.$$

Za testno statistiko izberemo $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$ in H_0 zavrnemo, če je $T > c_\alpha$. Določite c_α tako, da bo stopnja tveganja točno $\alpha \in (0, 1)$. Navedite tudi moč testa pri tej stopnji tveganja.

9. V regresijskem modelu

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

predpostavljamo $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ in $\mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}$, kjer je $\boldsymbol{\Sigma}$ znana obrnljiva matrika. Naj bo

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T$$

in

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = (\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \ldots, \hat{\epsilon}_n)^T = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}\,.$$

Pokažite, da je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\mathrm{Sl}\big((\mathbf{I} - \mathbf{H})\,\boldsymbol{\Sigma}\big)} \sum_{k=1}^{n} \hat{\epsilon}_k^2$$

nepristranska cenilka parametra σ^2.

10. Predpostavite običajni regresijski model

$$Y_k = \alpha + \beta x_k + \epsilon_k \quad \text{za } k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kjer je $E(\epsilon_k) = 0$, $\mathrm{var}(\epsilon_k) = \sigma^2$ in $\mathrm{cov}(\epsilon_k, \epsilon_l) = 0$ za $k \neq l$. Navedite najboljšo nepristansko linearno cenilko vsote $\alpha + \beta$. Utemeljite vaš razmislek.